

DM 30 : corrigé

Première partie.

1°)

◇ $F(1)$ est défini si et seulement si la série $\sum u_n(1)$ est définie et convergente.

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{n=1}^N u_n(1) = \sum_{n=1}^N (f(n+1) - f(n))$. C'est une somme télescopique, donc

$\sum_{n=1}^N u_n(1) = f(N+1) - f(1)$. Ainsi, $F(1)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(n) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \ell$. Dans ce cas, $F(1) = \ell - f(1)$.

1. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $f_1(n) = \left(\frac{1}{\frac{1}{n^\alpha} + 1}\right)^n = e^{-n \ln(1+n^{-\alpha})}$.

— Supposons que $\alpha \leq 0$. Alors $-n \ln(1+n^{-\alpha}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty$, donc $f_1(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$:

(C_1) est vérifiée et $F(1) = -\frac{1}{2}$.

— Supposons que $\alpha > 0$. Alors $n^{-\alpha} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc $\ln(1+n^{-\alpha}) = n^{-\alpha} + o(n^{-\alpha})$,

puis $f_1(n) = e^{-n^{1-\alpha} + o(n^{1-\alpha})}$.

— Si $0 < \alpha < 1$, $f_1(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = -\frac{1}{2}$.

— Si $\alpha = 1$, $f_1(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1}{e}$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = \frac{1}{e} - \frac{1}{2}$.

— Si $\alpha > 1$, $f_1(n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 1$, donc (C_1) est vérifiée et $F(1) = \frac{1}{2}$.

2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_2(n) = \sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$,

donc $f_2((2n+1)^2) = \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^n$: cette suite extraite possède 1 et -1 comme valeurs d'adhérence, donc elle diverge, ce qui implique la divergence de la suite $(f_2(n))$: la condition (C_1) n'est pas vérifiée.

3. De même, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_3(n) = (-1)^n \sin(\sqrt{n}\frac{\pi}{2})$,

donc $f_3((2n+1)^2) = (-1)^{(2n+1)^2} \sin(n\pi + \frac{\pi}{2}) = (-1)^{n+1}$: la condition (C_1) n'est pas vérifiée.

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. $f_4(n) = \sin\left(\frac{n^4+1}{n^2+1}\pi\right) = \sin\left(\frac{(n^4-1)+2}{n^2+1}\pi\right)$, donc

$f_4(n) = \sin\left(\left[n^2 - 1 + \frac{2}{n^2 + 1}\right]\pi\right) = (-1)^{n^2-1} \sin\left(\frac{2}{n^2 + 1}\pi\right)$, or $\frac{2}{n^2 + 1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$,
donc $f_4(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la condition (C_1) est vérifiée et $F(1) = 0$.

2°)

◇ $F(2)$ est défini si et seulement si $\sum u_n(2)$ est définie et convergente. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\sum_{n=1}^N u_n(2) = \sum_{n=1}^N (f(n+2) - f(n)) = \sum_{n=1}^N (f(n+2) - f(n+1)) + \sum_{n=1}^N (f(n+1) - f(n)).$$

Ce sont des sommes télescopiques, donc $\sum_{n=1}^N u_n(2) = f(N+2) + f(N+1) - f(1) - f(2)$.

Ainsi, $F(2)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(n+1) + f(n) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \ell$.

◇ Si $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell \in \mathbb{R}$, alors $f(n+1) + f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 2\ell$, donc $(C_1) \implies (C_2)$.

La réciproque est fautive. Par exemple lorsque $f(x) = \cos(\pi x)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = (-1)^n$, donc (C_1) est fautive, mais $f(n+1) + f(n) = 0$, donc (C_2) est vraie.

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, donc

$$f_3(n+1) + f_3(n) = 2 \sin\left(\frac{4n+2 + \sqrt{n} + \sqrt{n+1}}{2} \frac{\pi}{2}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{2} \frac{\pi}{2}\right),$$

ainsi $|f_3(n+1) + f_3(n)| \leq 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} \frac{\pi}{4}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $f_3(n+1) + f_3(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$: la condition (C_2) est vérifiée

$$\text{et } F(2) = -f(1) - f(2) = 1 - \sin\left(\frac{\sqrt{2}\pi}{2}\right).$$

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $f_2(n) = (-1)^n f_3(n)$,

$$\text{donc } f_2(n) - f_2(n+1) = (-1)^n (f_3(n) + f_3(n+1)) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Ainsi, si l'on suppose qu'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f_2(n) + f_2(n+1) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$, alors

$f_2(n) = \frac{1}{2}((f_2(n) + f_2(n+1)) + (f_2(n) - f_2(n+1)))$ converge également, ce qui est faux d'après la question précédente. La condition (C_2) n'est donc pas vérifiée pour f_2 .

3°) a) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. $F(p)$ est défini si et seulement si $\sum u_n(p)$ est définie et convergente.

$$\text{Soit } N \in \mathbb{N}^*. \sum_{n=1}^N u_n(p) = \sum_{n=1}^N (f(n+p) - f(n)) = \sum_{n=1}^N \sum_{i=0}^{p-1} (f(n+i+1) - f(n+i)),$$

$$\text{donc } \sum_{n=1}^N u_n(p) = \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{n=1}^N (f(n+i+1) - f(n+i)) = \sum_{i=0}^{p-1} (f(N+i+1) - f(i+1)).$$

Ainsi, $F(p)$ est défini si et seulement si il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $\sum_{i=0}^{p-1} f(n+i) \xrightarrow[n \in \mathbb{N}^*]{n \rightarrow +\infty} \ell$.

$$\text{b) } \diamond F(0) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n) - f(n)) = 0.$$

◇ On suppose que (C_1) est vérifiée.

Alors il est clair que (C_p) est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}
F(p+1) - F(p) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+p+1) - f(n)) - \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+p) - f(n)) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+p+1) - f(n+p)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) - f(p+1).
\end{aligned}$$

\diamond On en déduit que $\sum_{p=0}^{+\infty} (F(p+1) - F(p)) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0$.

4°) \diamond $\sum f(n)$ converge, donc $f(n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. Ainsi (C_1) est vérifiée, donc (C_p) est vérifiée pour tout $p \in \mathbb{N}$.

\diamond D'après la question précédente, $F(p+1) - F(p) = -f(p+1)$, donc $\sum (F(p+1) - F(p))$ converge.

\diamond De plus $\sum_{p=0}^{+\infty} (F(p+1) - F(p)) = -S$.

Deuxième partie.

Dans cette partie, on suppose que f est de classe C^1 dans \mathbb{R}^* et qu'il existe trois constantes $N \in \mathbb{N}^*$, $K \in \mathbb{R}_+^*$ et $\alpha \in]1, +\infty[$ telles que

$$\forall x \geq N, |f'(x)| \leq \frac{K}{x^\alpha}.$$

1°) Soit x un réel fixé distinct d'un entier strictement négatif.

a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $x+n \neq 0$, donc $u_n(x) = f(n+x) - f(n)$ est définie.

D'après l'égalité des accroissements finis appliquée à f , supposée de classe C^1 , entre n et $n+x$, il existe $y \in [\min(n, n+x), \max(n, n+x)]$ tel que $f(n+x) - f(n) = xf'(y)$.

Supposons que $n \geq \max(N, N-x)$. Ainsi, $y \geq N$, donc $|f(n+x) - f(n)| \leq |x| \frac{K}{y^\alpha}$.

Si $x \geq 0$, $y \geq n$, donc $|f(n+x) - f(n)| \leq |x| \frac{K}{n^\alpha}$.

Si $x < 0$, $y \geq n+x$, donc $|f(n+x) - f(n)| \leq |x| \frac{K}{(n+x)^\alpha} \sim |x| \frac{K}{n^\alpha}$.

Or la série de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge, donc $\sum (f(n+x) - f(n))$ est absolument convergente, ce qui prouve que F est définie en x .

b) \diamond En particulier, $F(1)$ est définie, donc d'après la question I.1, il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $f(p) \xrightarrow[p \in \mathbb{N}^*]{p \rightarrow +\infty} \ell$.

\diamond Soit $x \in [1, +\infty[$. D'après l'égalité des accroissements finis, il existe $c_x \in]\lfloor x \rfloor, x]$ tel que $f(x) - f(\lfloor x \rfloor) = (x - \lfloor x \rfloor) f'(c_x)$ (c'est évident lorsque $\lfloor x \rfloor = x$), donc lorsque $x \geq N$, ce qui implique également $\lfloor x \rfloor \geq N$, $|f(x) - f(\lfloor x \rfloor)| \leq |x - \lfloor x \rfloor| \frac{K}{c_x^\alpha} \leq \frac{K}{\lfloor x \rfloor^\alpha}$, or

$\frac{1}{\lfloor x \rfloor^\alpha} \xrightarrow[x \in [1, +\infty[]{x \rightarrow +\infty} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $f(x) - f(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x \in [1, +\infty[]{x \rightarrow +\infty} 0$.

Or par composition des limites, $f(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x \in [1, +\infty[]{x \rightarrow +\infty} \ell$,
donc $f(x) = (f(x) - f(\lfloor x \rfloor)) + f(\lfloor x \rfloor) \xrightarrow[x \in [1, +\infty[]{x \rightarrow +\infty} \ell$.

2°) a) \diamond Lorsque $y \geq N$, $|f'(y)| \leq \frac{K}{y^\alpha} \leq \frac{K}{N^\alpha}$, donc $f'|_{]N, +\infty[}$ est bornée. De plus $f'|_{[1, N]}$ est continue et $[1, N]$ est un compact, donc $f'|_{[1, N]}$ est aussi bornée. On en déduit que $\{|f'(y)| \mid y \in [1, +\infty[\}$ est majoré, or c'est un ensemble non vide de réels, donc d'après la propriété de la borne supérieure, cet ensemble possède bien une borne supérieure, que l'on notera A .

\diamond $S_N(x) - S_N(x') = \sum_{n=1}^N (f(x+n) - f(x'+n))$, or pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, il existe

$c_n \in [x+n, x'+n]$ tel que $f(x+n) - f(x'+n) = (x-x')f'(c_n)$.

Alors $|f(x+n) - f(x'+n)| \leq |x-x'|A$,

donc $|S_N(x) - S_N(x')| = \sum_{n=1}^N |f(x+n) - f(x'+n)| \leq \sum_{n=1}^N |x-x'|A = NA|x-x'|$

b) \diamond De même, pour tout $n > N$, il existe $c_n \in [x+n, x'+n]$ tel que

$|f(x+n) - f(x'+n)| = |x-x'| |f'(c_n)| \leq |x-x'| \frac{K}{c_n^\alpha} \leq |x-x'| \frac{K}{n^\alpha}$, or la série de Riemann

$\sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ est convergente, donc $\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (f(x+n) - f(x'+n)) \right| \leq \sum_{n=N+1}^{+\infty} |x-x'| \frac{K}{n^\alpha}$, donc

$\left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (f(x+n) - f(x'+n)) \right| \leq C|x-x'|$, où $C = K \sum_{n=N+1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

\diamond Par inégalité triangulaire,

$|F(x) - F(x')| \leq |S_N(x) - S_N(x')| + \left| \sum_{n=N+1}^{+\infty} (f(x+n) - f(x'+n)) \right| \leq L|x-x'|$, où

$L = NA + C$.

c) $F|_{\mathbb{R}_+}$ est ainsi L -lipschitzienne, donc elle est continue.

3°) On fixe un réel x distinct d'un entier strictement négatif.

a) \diamond $F(x+1) - F(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f(x+n+1) - f(x+n)) = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) - f(x+1)$, car c'est

une somme télescopique. Ainsi, (1) : $F(x) = F(x+1) + f(x+1) - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

\diamond F et f étant continue sur \mathbb{R}_+^* , par composition, $x \mapsto F(x+1) + f(x+1)$ est continue sur $] -1, 0]$, donc l'expression ci-dessus prouve que F est continue sur $] -1, 0]$.

\diamond Pour $p \in \mathbb{N}$, notons $R(p)$ l'assertion suivante : F est continue sur $] -(p+1), -p[$.

Pour $p = 0$, on vient de montrer $R(0)$.

Pour $p \geq 0$, supposons $R(p)$. Alors par composition, $x \mapsto F(x+1) + f(x+1)$ est continue sur $] -(p+2), -(p+1)[$ et la relation (1) prouve alors $R(p+1)$.

D'après le principe de récurrence, F est continue sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$.

b) Pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_-^*$, $F(x) - f(x+1) = F(x+1) - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$, or F est continue en 0, donc $F(x) - f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} F(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$.

Par ailleurs, en convenant que $f(0) = 0$,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)] = f(0) - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = - \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t),$$

$$\text{donc } F(x) - f(x+1) \xrightarrow{x \rightarrow -1} \sum_{n=0}^{+\infty} [f(n) - f(n+1)].$$

c) Posons $\ell = \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Soit p est un entier strictement positif.

$$\begin{aligned} F(x+p) - F(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+x+p) - f(n+x)) \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{p-1} (f(n+x+i+1) - f(n+x+i)) \\ &= \sum_{i=0}^{p-1} \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+x+i+1) - f(n+x+i)), \end{aligned}$$

car toutes ces séries sont convergentes.

$$\text{Ainsi, } F(x+p) - F(x) = \sum_{i=0}^{p-1} (\ell - f(x+i+1)) = p\ell - \sum_{i=0}^{p-1} f(x+i+1).$$

On en déduit que $F(x) - f(x+p) = F(x+p) + \sum_{i=0}^{p-2} f(x+i+1) - p\ell$, donc

$$\begin{aligned} F(x) - f(x+p) &\xrightarrow{x \rightarrow -p} F(0) + \sum_{i=1}^{p-1} f(-p+i) - p\ell. \text{ D'autre part,} \\ \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)] &= \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{i=0}^{p-1} (f(n-i-1) - f(n-i)) = \sum_{i=0}^{p-1} (f(-i) - \ell) \\ &= -p\ell + \sum_{j=1}^{p-1} f(-p+j), \end{aligned}$$

donc en convenant que $f(0) = 0$, $F(x) - f(x+p) \xrightarrow{x \rightarrow -p} \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)]$.

4°) a) \diamond Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $-x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $G(-x) = F(-x) - F(x) + f(-x)$, or f est impaire, donc $G(-x) = -(F(x) - F(-x) + f(x)) = -G(x)$. Ainsi G est impaire.

\diamond Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Alors $x+1 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ et $G(x+1) = F(x+1) - F(-x-1) + f(x+1)$, or en tenant compte du fait que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$, la relation (1) établie au II.3.a devient

$$(1) : F(x) = F(x+1) + f(x+1). \text{ Ainsi, } G(x+1) = F(x) - F(-x-1).$$

De plus, remplaçant x par $-x-1$ dans (1), on obtient $F(-x-1) = F(-x) + f(-x)$, donc $G(x+1) = F(x) - F(-x) + f(x) = G(x)$. Ainsi, G est périodique de période 1.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$. Alors $G(x) - f(x+p) = G(x+p) - f(x+p) = F(x+p) - F(-(x+p))$,

mais F est continue en 0, donc $G(x) - f(x+p) \xrightarrow{x \rightarrow -p} 0$.

c) \diamond Supposons d'abord que $p \in \mathbb{N}^*$. F étant continue en p ,

$$G(x) - f(x+p) = [F(x) - f(x+p)] - F(-x) + f(x) \\ \xrightarrow{x \rightarrow -p} \lim_{t \rightarrow -p} [F(t) - f(t+p)] - F(p) + f(p),$$

donc d'après la question précédente, $\lim_{t \rightarrow -p} [F(t) - f(t+p)] = F(p) + f(p)$.

Alors, d'après la question II.3.c, $\sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n)] = F(p) + f(p)$.

Or $F(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} (f(n+p) - f(n))$, donc

$$f(p) = \sum_{n=1}^{+\infty} [f(n-p) - f(n+p)] = \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} [f(n-p) - f(n+p)] - f(2p).$$

On a bien montré que $\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq p}}^{+\infty} [f(n+p) - f(n-p)] = -f(p) - f(2p)$.

\diamond Supposons maintenant que $p \in \mathbb{Z}_-^*$. Alors $-p \in \mathbb{N}^*$, donc d'après le point précédent,

$$\sum_{\substack{n=1 \\ n \neq -p}}^{+\infty} [f(n-p) - f(n - (-p))] = -f(-p) - f(-2p), \text{ puis à l'aide de l'imparité de } f, \\ \sum_{\substack{n=1 \\ n \neq |p|}}^{+\infty} [f(n+p) - f(n-p)] = -f(p) - f(2p).$$

5°) \diamond Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \frac{1}{x}$. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$, donc pour tout $x \geq 1$, $|f'(x)| \leq \frac{1}{x^2}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Décomposons en éléments simples la fraction rationnelle $\frac{1}{X^2 - p^2} = \frac{1}{(X-p)(X+p)}$:

il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $\frac{1}{X^2 - p^2} = \frac{a}{X-p} + \frac{b}{X+p}$. On calcule $a = \left(\frac{1}{X+p}\right)(p) = \frac{1}{2p}$

et $b = -\frac{1}{2p}$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{p\}$, $\frac{1}{n^2 - p^2} = -\frac{1}{2p} \left(\frac{1}{n+p} - \frac{1}{n-p} \right)$.

Ainsi la question précédente appliquée à f montre que s_1 est définie et que

$$s_1 = -\frac{1}{2p}(-f(2p) - f(p)) = \frac{3}{4p^2}.$$

\diamond Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \frac{\varepsilon(x)}{\sqrt{|x|}}$. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et pour tout

$x \geq 1$, $|f'(x)| = \frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Ainsi s_2 est définie et $s_2 = -f(2p) - f(p) = -\frac{1 + \sqrt{2}}{\sqrt{2p}}$.

◇ Décomposons la fraction rationnelle $F = \frac{X}{(X^2 - 1)^2}$ en éléments simples : il existe

$a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tels que $F = \frac{a}{X - 1} + \frac{b}{(X - 1)^2} + \frac{c}{X + 1} + \frac{d}{(X + 1)^2}$.

$F(X) = -F(-X) = \frac{c}{X - 1} - \frac{d}{(X - 1)^2} + \frac{a}{X + 1} - \frac{b}{(X + 1)^2}$, donc par unicité de la décomposition en éléments simples, $c = a$ et $b = -d$.

De plus $b = \left(\frac{X}{(X + 1)^2}\right)(1) = \frac{1}{4}$.

Par ailleurs, $tF(t) \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, donc $0 = a + c = 2a$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$,

$$\frac{n}{(n^2 - 1)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{(n - 1)^2} - \frac{1}{(n + 1)^2} \right).$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, posons $f(x) = \frac{\varepsilon(x)}{x^2}$. f est de classe C^1 sur \mathbb{R}^* et pour tout $x \geq 1$,

$|f'(x)| = \frac{2}{x^3}$. De plus f est impaire et tend vers 0 en $+\infty$, donc f vérifie les conditions de l'énoncé et l'on peut utiliser la formule de la question précédente.

Ainsi, s_3 est définie et $s_3 = \frac{1}{4}(f(2) + f(1)) = \frac{5}{16}$.