

## DM 31 : un corrigé

### Partie I : Polynômes de Bernstein

1°)

- ◇ D'après le cours,  $\deg(B_{n,k}) = \deg(X^k) + \deg((1-X)^{n-k}) = k + n - k = n$ .
- ◇  $B_{n,k}(X) = X^k Q(X)$  où  $Q \in \mathbb{R}[X]$  vérifie  $Q(0) = 1 \neq 0$ , donc 0 est racine de  $B_{n,k}$  de multiplicité  $k$ . En particulier, 0 est racine de  $B_{n,k}$  si et seulement si  $k \geq 1$ .
- ◇ De même, on montre que 1 est racine de  $B_{n,k}$  de multiplicité  $n - k$ . En particulier, 1 est racine de  $B_{n,k}$  si et seulement si  $k \leq n - 1$ .

2°) D'après la formule du binôme de Newton,  $B_{n,k} = X^k \sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} (-X)^h$ ,

donc  $B_{n,k} = \sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} (-1)^h X^{k+h}$ . En posant  $j = h + k$ ,

on obtient  $B_{n,k} = \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} (-1)^{j-k} X^j$ .

3°)  $X^k = X^k (X + (1-X))^{n-k} = X^k \sum_{h=0}^{n-k} \binom{n-k}{h} X^h (1-X)^{n-k-h}$ , donc en posant

$j = k + h$ ,  $X^k = \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} X^j (1-X)^{n-j} = \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}$ .

4°) Soit  $P \in \mathbb{R}_n[X]$ . Il existe  $(p_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k X^k$ , donc

d'après la question précédente,  $P(X) = \sum_{k=0}^n p_k \sum_{j=k}^n \binom{n-k}{j-k} B_{n,j}$ . Ainsi,

$$P(X) = \sum_{\substack{j,k \in \mathbb{N}^2 \\ 0 \leq k \leq j \leq n}} p_k \binom{n-k}{j-k} B_{n,j} = \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^j p_k \binom{n-k}{j-k} \right) B_{n,j}.$$
 Ceci montre qu'il

existe  $(\alpha_k)_{0 \leq k \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$  tel que  $P(X) = \sum_{k=0}^n \alpha_k B_{n,k}$ .

Donc  $(B_{n,k})_{0 \leq k \leq n}$  est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_n[X]$ , or cette famille est de cardinal  $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ , donc c'est une base.

5°) Pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq k \leq n$ , posons  $I_{n,k} = \int_0^1 B_{n,k}(t) dt$ .

◇ Supposons que  $0 \leq k < n$  et intégrons par parties :

$$I_{n,k} = \left[ \frac{t^{k+1}}{k+1} (1-t)^{n-k} \right]_0^1 + \int_0^1 \frac{t^{k+1}}{k+1} (n-k)(1-t)^{n-k-1} dt, \text{ donc } I_{n,k} = \frac{n-k}{k+1} I_{n,k+1}.$$

◇ On peut en déduire par récurrence descendante finie sur  $k \in \{0, \dots, n\}$

$$\text{que } R(k) : I_{n,k} = I_{n,n} \prod_{h=k}^{n-1} \frac{n-h}{h+1}.$$

En effet, c'est vrai pour  $k = n$  car le produit est alors vide, donc il est égal à 1.

De plus, si  $R(k+1)$  est vrai pour  $0 \leq k < n$ ,

$$\text{alors } I_{n,k} = \frac{n-k}{k+1} I_{n,k+1} = \frac{n-k}{k+1} \times I_{n,n} \prod_{h=k+1}^{n-1} \frac{n-h}{h+1} = I_{n,n} \prod_{h=k}^{n-1} \frac{n-h}{h+1}.$$

◇ De plus  $I_{n,n} = \frac{1}{n+1}$ , donc pour tout  $n, k \in \mathbb{N}$  tels que  $0 \leq k \leq n$ ,

$$I_{n,k} = \frac{(n-k)!}{\left[ \frac{(n+1)!}{k!} \right]} = \frac{1}{(n+1) \binom{n}{k}}.$$

6°) Pour tout  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $B'_{n,j} = jX^{j-1}(1-X)^{n-j} - (n-j)X^j(1-X)^{n-j-1}$  : c'est en particulier vrai lorsque  $j = 0$  ou  $j = n$ , en travaillant dans  $\mathbb{R}(X)$  (ensemble des fractions rationnelles). Ainsi,

$$Q'(X) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j \alpha_j X^{j-1} (1-X)^{n-j} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j) \alpha_j X^j (1-X)^{n-j-1}.$$

Dans la première somme, on pose  $i = j - 1$  :

$$Q'(X) = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i+1} (i+1) \alpha_{i+1} X^i (1-X)^{n-i-1} - \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} (n-j) \alpha_j X^j (1-X)^{n-j-1}.$$

De plus, d'après la formule comité-président, pour tout  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$$\binom{n}{j+1} (j+1) = n \binom{n-1}{j} \text{ et } \binom{n}{n-j} (n-j) = n \binom{n-1}{n-j-1} = n \binom{n-1}{j},$$

$$\text{donc } Q'(X) = n \sum_{j=0}^{n-1} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) \binom{n-1}{j} B_{n-1,j}.$$

7°) Soit  $r \in \mathbb{N}$ . On note  $R(r)$  l'assertion suivante : pour tout  $n \geq r$ , pour tout

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \text{ si l'on pose } Q(X) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_j B_{n,j},$$

$$\text{alors } Q^{(r)}(X) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} \right) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

◇ Pour  $r = 0$ , on vérifie que  $\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} = \alpha_j$ , donc  $R(0)$  est vraie.

◇ Pour  $r \geq 0$ , on suppose  $R(r)$ . Soit  $n \geq r + 1$  et  $(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ .

Posons  $Q(X) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \alpha_j B_{n,j}$ . D'après  $R(r)$ ,

$$Q^{(r)}(X) = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} \right) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

On peut alors appliquer la question précédente (c'est-à-dire  $R(1)$ ) en remplaçant  $n$  par  $n-r$ . On obtient que  $Q^{(r+1)} = (n-r) \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r-1} \beta_j \binom{n-r-1}{j} B_{n-r-1,j}$ , où

$$\begin{aligned} \beta_j &= \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+1+k} - \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} \alpha_{j+k} \\ &= \sum_{h=1}^{r+1} \binom{r}{h-1} (-1)^{r-(h-1)} \alpha_{j+h} + \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k+1} \alpha_{j+k} \\ &= \alpha_{j+r+1} + (-1)^{r+1} \alpha_j + \sum_{k=1}^r \left( \binom{r}{k-1} + \binom{r}{k} \right) (-1)^{r-k+1} \alpha_{j+k}, \end{aligned}$$

donc d'après la relation du triangle de Pascal,

$$\beta_j = \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} (-1)^{r+1-k} \alpha_{j+k}, \text{ donc}$$

$$Q^{(r+1)} = \frac{n!}{(n-(r+1))!} \sum_{j=0}^{n-r-1} \left( \sum_{k=0}^{r+1} \binom{r+1}{k} (-1)^{r+1-k} \alpha_{j+k} \right) \binom{n-r-1}{j} B_{n-r-1,j}, \text{ ce}$$

qui prouve  $R(r+1)$ .

D'après le principe de récurrence, la propriété est démontrée.

## Partie II : Théorème de Stone-Weierstrass

8°) Soit  $x \in [0, 1]$ .

◇  $B_n(1)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = (x + (1-x))^n = 1$  d'après la formule du binôme de Newton, donc  $B_n(1) = 1$ .

◇  $B_n(X)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n} x^k (1-x)^{n-k}$ , or d'après la formule comité-président,

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\},$$

donc  $B_n(X)(x) = x \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{(n-1)-(k-1)}$ . Ainsi, toujours d'après la for-

mule du binôme de Newton,  $B_n(X) = X$ .

◇ Lorsque  $n = 1$ ,  $B_1(f)(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$ , donc  $B_1(X^2) = X$ . Supposons maintenant que  $n \geq 2$ .

$$B_n(X^2)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{k^2}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}, \text{ or } k^2 = k(k-1) + k \text{ donc}$$

$$B_n(X^2)(x) = \sum_{k=2}^n \binom{n}{k} \frac{k(k-1)}{n^2} x^k (1-x)^{n-k} + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \frac{k}{n^2} x^k (1-x)^{n-k}, \text{ or d'après la}$$

formule comité-président-vice-président,

$$k(k-1) \binom{n}{k} = n(n-1) \binom{n-2}{k-2} \text{ pour tout } k \in \{2, \dots, n\},$$

$$\text{donc } B_n(X^2)(x) = x^2 \sum_{k=2}^n \binom{n-2}{k-2} \frac{n-1}{n} x^{k-2} (1-x)^{(n-2)-(k-2)} + \frac{1}{n} B_n(X)(x). \text{ Ainsi,}$$

$$B_n(X^2) = \frac{n-1}{n} X^2 + \frac{1}{n} X, \text{ ce qui est encore vrai lorsque } n = 1.$$

9°)

◇ Pour tout  $f \in \mathcal{C}$ ,  $B_n(f)$  est un polynôme, donc  $B_n(f) \in \mathcal{C}$ .

De plus, on vérifie que, pour tout  $f, g \in \mathcal{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $B_n(\alpha f + g) = \alpha B_n(f) + B_n(g)$ , donc  $B_n \in L(\mathcal{C})$ .

◇ Soit  $f \in \mathcal{C}$ . Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \times |x^k (1-x)^{n-k}| \text{ (par inégalité triangulaire)} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \|f\| \times |x^k (1-x)^{n-k}| \\ &= \|f\| \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times x^k (1-x)^{n-k} \text{ (car } 0 \leq x^k (1-x)^{n-k}) \\ &= \|f\|, \end{aligned}$$

Ainsi,  $\|f\|$  est un majorant de  $\{|B_n(f)(x)| / x \in [0, 1]\}$ , or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc  $\|B_n(f)\| \leq \|f\|$  (par la suite, cet argument sera appelé un passage à la borne supérieure). De plus,  $B_n$  est linéaire, donc d'après le cours,  $B_n$  est continue.

10°) Soit  $x \in [0, 1]$ .

$$B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (e^{\frac{1}{n}} x)^k (1-x)^{n-k} = (e^{\frac{1}{n}} x + 1 - x)^n = (1 + x(e^{\frac{1}{n}} - 1))^n.$$

Ainsi,  $B_n(f) = (1 + X(e^{\frac{1}{n}} - 1))^n$ .

$$B_n(f)(x) = e^{n \ln(1 + x(e^{\frac{1}{n}} - 1))} = e^{n(\frac{x}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{x + o(1)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} e^x.$$

11°)

◇ On a déjà vu que  $0 \leq x^k(1-x)^{n-k}$ , donc  $S_{n,\delta}(x) \geq 0$ .

◇ Pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  tel que  $\left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta$ ,  $\delta^2 \leq \left( \frac{k}{n} - x \right)^2$ , donc

$$\begin{aligned} \delta^2 S_{n,\delta}(x) &\leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta}} \left( \frac{k}{n} - x \right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left[ \left( \frac{k}{n} \right)^2 - 2x \frac{k}{n} + x^2 \right] \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= B_n(X^2)(x) - 2x B_n(X)(x) + x^2 B_n(1)(x) \\ &= \frac{n-1}{n} x^2 + \frac{1}{n} x - 2x^2 + x^2, \end{aligned}$$

$$\text{donc } S_{n,\delta}(x) \leq \frac{x - x^2}{n\delta^2}.$$

De plus,  $x^2 - x = (x - \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}$ , donc  $S_{n,\delta}(x) \leq \frac{1}{4n\delta^2}$ .

**12°)**

◇ Soit  $x \in [0, 1]$  et  $\delta > 0$ .

$f(x) - B_n(f)(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left( f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) x^k (1-x)^{n-k}$ , donc par inégalité triangulaire,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + A,$$

$$\text{où } A = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| \geq \delta}} \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.$$

Or, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq |f(x)| + \left| f\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq 2\|f\|$ ,

donc  $A \leq 2\|f\| S_{n,\delta}(x)$ , ce qu'il fallait démontrer.

◇ Soit  $\varepsilon > 0$ .  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  qui est compact, donc d'après le théorème de Heine,  $f$  est uniformément continue. Ainsi, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in [0, 1]$  avec  $|x - y| \leq \delta$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

$\frac{\|f\|}{2n\delta^2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{\|f\|}{2n\delta^2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ .

Soit  $n \geq N$ . Soit  $x \in [0, 1]$ . D'après l'inégalité précédemment démontrée,

$$|f(x) - B_n(f)(x)| \leq 2\|f\| S_{n,\delta}(x) + \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ \left| \frac{k}{n} - x \right| < \delta}} \frac{\varepsilon}{2} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k},$$

$$\text{donc } |f(x) - B_n(f)(x)| \leq \frac{\|f\|}{2n\delta^2} + \frac{\varepsilon}{2} \leq \varepsilon.$$

Alors, par passage à la borne supérieure, on en déduit que  $\|f - B_n(f)\| \leq \varepsilon$ , ce qu'il fallait démontrer.

**13°)** D'après la question précédente,

$\left| \int_0^1 (f(t) - B_n(f)(t)) dt \right| \leq \int_0^1 |f(t) - B_n(f)(t)| dt \leq \int_0^1 \|f - B_n(f)\| dt$ , donc

$\left| \int_0^1 (f(t) - B_n(f)(t)) dt \right| \leq \|f - B_n(f)\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ .

Ainsi, d'après le principe des gendarmes,  $\int_0^1 B_n(f)(t) dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f(t) dt$ .

Mais par ailleurs,  $\int_0^1 B_n(f)(t) dt = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f\left(\frac{k}{n}\right) \int_0^1 B_{n,k}(t) dt$ , donc d'après la

question 5,  $\int_0^1 B_n(f)(t) dt = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$ , ce qui permet de conclure.

14°) D'après l'hypothèse, par combinaison linéaire, pour tout  $P \in \mathbb{R}[X]$ ,

$\int_0^1 P(x)f(x) dx = 0$ , donc en particulier, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\int_0^1 B_n(f)(x)f(x) dx = 0$ .

D'autre part,  $\left| \int_0^1 (B_n(f)(x) - f(x))f(x) dx \right| \leq \|B_n(f) - f\| \|f\| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après

le principe des gendarmes,  $\int_0^1 B_n(f)(x)f(x) dx \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f^2(t) dt$ .

On en déduit que  $\int_0^1 f^2(t) dt = 0$ , or  $f^2$  est positive et continue, donc  $f^2$  est identiquement nulle. On a bien montré que  $f = 0$ .

## Partie III : convergence uniforme des dérivées

15°)

◇ D'après la question 7,

$$[B_n(f)]^{(r)} = \frac{n!}{(n-r)!} \sum_{j=0}^{n-r} \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f\left(\frac{j+k}{n}\right) \right) \binom{n-r}{j} B_{n-r,j}.$$

◇ En particulier, avec  $r = 1$ , on obtient que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$[B_n(f)]'(x) = n \sum_{j=0}^{n-1} \left( f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \right) \binom{n-1}{j} B_{n-1,j}.$$

Si l'on suppose que  $f$  est croissante, alors pour tout  $j \in \{0, \dots, n-1\}$ ,

$f\left(\frac{j+1}{n}\right) - f\left(\frac{j}{n}\right) \geq 0$ , donc  $B_n(f)'(x) \geq 0$ , ce qui prouve que  $B_n(f)$  est aussi croissante.

◇ Lorsque  $n = 1$ ,  $B_1(f)$  est un polynôme de degré inférieur à 1, donc c'est une fonction toujours convexe (et concave). Supposons maintenant que  $n \geq 2$ . Alors d'après la formule précédente avec  $r = 2$ , pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$[B_n(f)]''(x) = n(n-1) \sum_{j=0}^{n-2} \left( f\left(\frac{j}{n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right) \right) \binom{n-2}{j} B_{n-2,j}.$$

Supposons que  $f$  est convexe.

Soit  $j \in \{0, \dots, n-2\}$ . Alors, par inégalité de convexité,

$$f\left(\frac{j+1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2}\left[\frac{j}{n} + \frac{j+2}{n}\right]\right) \leq \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{j}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right)\right],$$

donc  $f\left(\frac{j}{n}\right) - 2f\left(\frac{j+1}{n}\right) + f\left(\frac{j+2}{n}\right) \geq 0$ . Alors  $[B_n(f)]''(x) \geq 0$ , ce qui prouve que  $B_n(f)$  est aussi convexe.

**16°)** Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$ . D'après l'égalité des accroissements finis, il existe  $t_{n,k} \in ]\frac{k}{n+1}, \frac{k+1}{n+1}[$  tel que  $f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}f'(t_{n,k})$ .

De plus,  $|t_{n,k} - \frac{k}{n}| \leq |t_{n,k} - \frac{k}{n+1}| + |\frac{k}{n+1} - \frac{k}{n}| \leq \frac{1}{n+1} + n|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}| = \frac{2}{n+1}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $f'$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in [0, 1]$  avec  $|x - y| \leq \delta$ ,  $|f'(x) - f'(y)| \leq \varepsilon$ .

$\frac{2}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{2}{n+1} \leq \delta$ .

Soit  $n \geq N$  et  $k \in \{0, \dots, n\}$ . Alors

$$\left| (n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| = \left| f'(t_{n,k}) - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon,$$

car  $|t_{n,k} - \frac{k}{n}| \leq \frac{2}{n+1} \leq \delta$ .

**17°)**

◇ Montrons d'abord que  $B_{n+1}(f)' - B_n(f') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ ,

$$B_{n+1}(f)'(x) - B_n(f')(x) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=0}^n \left( (n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right) \binom{n}{k} B_{n,k}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . D'après la question précédente, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\forall n \geq N, \forall k \in \{0, \dots, n\}, \left| (n+1)\left[f\left(\frac{k+1}{n+1}\right) - f\left(\frac{k}{n+1}\right)\right] - f'\left(\frac{k}{n}\right) \right| \leq \varepsilon.$$

Soit  $n \geq N$ . Pour tout  $x \in [0, 1]$ , d'après la relation (1) et l'inégalité triangulaire,

$$|B_{n+1}(f)'(x) - B_n(f')(x)| \leq \sum_{k=0}^n \varepsilon \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \varepsilon. \text{ Ainsi, par passage au sup,}$$

on a montré que  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^*, \forall n \geq N, \|B_{n+1}(f)' - B_n(f')\| \leq \varepsilon$ .

◇ On sait d'après la question 12 que  $B_n(f') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'$ ,

donc  $B_{n+1}(f)' = [B_{n+1}(f)' - B_n(f')] + B_n(f') \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'$ , puis  $[B_n(f)]' \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'$ .

**18°)** a) Il s'agit d'un polynôme d'interpolation de Lagrange, donc d'après le cours,

$$P(X) = \sum_{k=0}^r g(k) L_k(X), \text{ où } L_k(X) = \prod_{\substack{0 \leq h \leq r \\ h \neq k}} \frac{X-h}{k-h}.$$

Or  $\prod_{\substack{0 \leq h \leq r \\ h \neq k}} (k-h) = \left( \prod_{h=0}^{k-1} (k-h) \right) \times (-1)^{r-k} \prod_{h=k+1}^r (h-k) = (-1)^{r-k} k!(r-k)!$ , donc

$$P(X) = \sum_{k=0}^r g(k) \frac{(-1)^{r-k}}{k!(r-k)!} \prod_{\substack{0 \leq h \leq r \\ h \neq k}} (X-h).$$

b) Soit  $k \in \{0, \dots, r-1\}$ . L'application  $P - g$  s'annule en  $k$  et  $k+1$ , donc d'après le lemme de Rolle, il existe  $\alpha_{k,1} \in ]k, k+1[$  tel que  $(P - g)'(\alpha_{k,1}) = 0$ .

De même, pour tout  $k \in \{0, \dots, r-2\}$ ,  $(P - g)'$  s'annule en  $\alpha_{k,1}$  et  $\alpha_{k+1,1}$ , donc il existe  $\alpha_{k,2} \in ]\alpha_{k,1}, \alpha_{k+1,1}[$  tel que  $(P - g)''(\alpha_{k,2}) = 0$ .

Par récurrence sur  $h$ , on peut donc montrer que, pour tout  $h \in \{1, \dots, r\}$ , il existe une famille  $(\alpha_{k,h})_{0 \leq k \leq r-h}$  strictement croissante de réels de  $]0, r[$  en lesquels  $(P - g)^{(h)}$  s'annule.

En particulier, lorsque  $h = r$ ,  $(P - g)^{(r)}(\alpha_{0,r}) = 0$ . Posons  $x = \alpha_{0,r}$ .

$P$  est un polynôme de degré inférieur à  $r$ , donc  $P^{(r)}(x)$  est égal à son coefficient de degré  $r$  multiplié par  $r!$ . Ainsi, d'après la question a),  $P^{(r)}(x) = r! \sum_{k=0}^r g(k) \frac{(-1)^{r-k}}{k!(r-k)!}$ .

On a donc  $g^{(r)}(x) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} g(k)$ .

19°) On suppose que  $f$  est de classe  $C^r$ . D'après la question 15, en remplaçant  $n$  par  $n+r$ ,  $[B_{n+r}(f)]^{(r)} = \frac{(n+r)!}{n!} \sum_{j=0}^n \left( \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f\left(\frac{j+k}{n+r}\right) \right) \binom{n}{j} B_{n,j}$ .

Soit  $j \in \{0, \dots, n\}$ . Posons  $g_{n,j}(x) = f\left(\frac{j+x}{n+r}\right)$  pour tout  $x \in [0, r]$ . L'application  $g_{n,j}$  est bien définie car pour  $0 \leq j \leq n$  et  $0 \leq x \leq r$ ,  $0 \leq \frac{j+x}{n+r} \leq 1$ . De plus  $g_{n,j}$  est de classe  $C^r$ , donc d'après la question précédente, il existe  $x_{n,j} \in ]0, r[$  tel que  $g_{n,j}^{(r)}(x_{n,j}) = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} g(k)$ . Or  $g_{n,j}^{(r)}(x) = \left(\frac{1}{n+r}\right)^r f^{(r)}\left(\frac{j+x}{n+r}\right)$ , donc en posant

$t_{n,j} = \frac{j+x_{n,j}}{n+r}$ , on obtient :  $\sum_{k=0}^r \binom{r}{k} (-1)^{r-k} f\left(\frac{j+k}{n+r}\right) = \left(\frac{1}{n+r}\right)^r f^{(r)}(t_{n,j})$ .

On peut alors adapter les raisonnements des questions 16 et 17 :

$$\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!} [B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \left( f^{(r)}(t_{n,j}) - f^{(r)}\left(\frac{j}{n}\right) \right) B_{n,j}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,

$$\left| t_{n,j} - \frac{j}{n} \right| = \left| \frac{j+x_{n,j}}{n+r} - \frac{j}{n} \right| = \left| \frac{nx_{n,j} - rj}{n(n+r)} \right| \leq \frac{|x_{n,j}|}{n+r} + \frac{rj}{n(n+r)} \leq \frac{2r}{n+r}.$$

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $f^{(r)}$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que,

pour tout  $x, y \in [0, 1]$  avec  $|x - y| \leq \delta$ ,  $|f^{(r)}(x) - f^{(r)}(y)| \leq \varepsilon$ .

$\frac{2r}{n+r} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que pour tout  $n \geq N$ ,  $\frac{2r}{n+r} \leq \delta$ .

Ainsi, pour tout  $n \geq N$  et  $j \in \{0, \dots, n\}$ ,  $\left| f^{(r)}(t_{n,j}) - f^{(r)}\left(\frac{j}{n}\right) \right| \leq \varepsilon$ . On en déduit

comme en question 17 que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\left\| \frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!} [B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) \right\| \leq \varepsilon$ .

Ainsi,  $\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!} [B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , or



$$\frac{n!(n+r)^r}{(n+r)!} = \frac{(n+r)^r}{(n+r)(n+r-1)\dots(n+1)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{n^r}{n^r} = 1,$$

donc  $[B_{n+r}(f)]^{(r)} - B_n(f^{(r)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$ . On sait d'après la question 12 que  $B_n(f^{(r)}) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f^{(r)}$ ,

donc  $[B_{n+r}(f)]^{(r)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f^{(r)}$ , puis  $[B_n(f)]^{(r)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f^{(r)}$ .

## Partie IV : vitesse de convergence vers $f$

**20°)**

◇ Pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|f(x) - f(y)| \leq |f(x)| + |f(y)| \leq 2\|f\|$ ,

donc  $\{|f(x) - f(y)| / (x, y \in [0, 1]) \wedge (|x - y| \leq \delta)\}$  est majoré par  $2\|f\|$ . Cet ensemble étant non vide,  $\omega(\delta)$  est bien défini et par passage au sup,  $\omega(\delta) \leq 2\|f\|$ , donc  $\omega$  est une application bornée.

◇ Soit  $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+$  avec  $\delta \leq \delta'$ . Alors  $\{|f(x) - f(y)| / (x, y \in [0, 1]) \wedge (|x - y| \leq \delta)\}$  est inclus dans  $\{|f(x) - f(y)| / (x, y \in [0, 1]) \wedge (|x - y| \leq \delta')\}$ , donc d'après le cours,  $\omega(\delta) \leq \omega(\delta')$  : l'application  $\omega$  est croissante.

**21°)** Notons  $K = \{(x, y) \in [0, 1]^2 / |x - y| \leq \delta\}$ .  $K$  est inclus dans la boule unité de  $\mathbb{R}^2$  muni de la norme infinie, donc  $K$  est borné. De plus  $K = [0, 1]^2 \cap \varphi^{-1}([0, \delta])$  où  $\varphi$  est l'application de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}$  définie par  $\varphi(x, y) = |x - y|$ .  $\varphi$  est continue d'après les théorèmes usuels et  $[0, \delta]$  est un fermé de  $\mathbb{R}$ , donc  $K$  est un fermé. Ainsi  $K$  est un fermé borné de  $\mathbb{R}^2$  qui est de dimension finie, donc c'est un compact de  $\mathbb{R}^2$ .

Alors l'application continue  $(x, y) \mapsto |f(x) - f(y)|$  est bornée et elle atteint sa borne supérieure : il existe  $(x, y) \in [0, 1]^2$  tel que  $|x - y| \leq \delta$  et  $|f(x) - f(y)| = \omega(\delta)$ .

**22°)** D'après le théorème de la limite monotone,  $\omega(\delta) \xrightarrow[\delta \rightarrow 0^+]{} \ell = \inf\{\omega(\delta) / \delta > 0\}$ .

Soit  $\varepsilon > 0$ .  $f$  étant uniformément continue, il existe  $\delta > 0$  tel que, pour tout  $x, y \in [0, 1]$ ,  $|x - y| \leq \delta \implies |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ .

Alors d'après la question précédente,  $\omega(\delta) \leq \varepsilon$ , donc  $\ell \leq \varepsilon$ , pour tout  $\varepsilon > 0$ .

On en déduit que  $\ell \leq 0$ , mais  $\omega$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$ , donc  $\ell = 0$ .

**23°)** Soit  $\delta > 0$  et  $x, y \in [0, 1]$ .

Quitte à échanger  $x$  et  $y$ , on peut supposer que  $x \leq y$ .

Posons  $n = \lfloor \frac{y-x}{\delta} \rfloor$ . Ainsi  $n$  est un entier tel que  $n \leq \frac{y-x}{\delta} \leq n+1$ .

En particulier,  $0 \leq \frac{y-x}{n+1} \leq \delta$ .

pour tout  $k \in \{0, \dots, n+1\}$ , posons  $x_k = x + k \frac{y-x}{n+1}$ . Ainsi,

$$|f(x) - f(y)| = |f(x_0) - f(x_{n+1})| = \left| \sum_{k=0}^n (f(x_k) - f(x_{k+1})) \right| \leq \sum_{k=0}^n |f(x_k) - f(x_{k+1})|, \text{ or}$$

pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$ ,  $|x_k - x_{k+1}| = \frac{y-x}{n+1} \leq \delta$ , donc  $|f(x_k) - f(x_{k+1})| \leq \omega(\delta)$ .

On en déduit que  $|f(x) - f(y)| \leq (n+1)\omega(\delta) \leq (n^2+1)\omega(\delta) \leq \omega(\delta) \left(1 + \frac{|x-y|^2}{\delta^2}\right)$ .

24°) Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . Alors

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &= \left| \sum_{k=0}^n \left( f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \end{aligned}$$

donc d'après la question précédente, pour tout  $\delta > 0$ ,

$$\begin{aligned} |B_n(f)(x) - f(x)| &\leq \sum_{k=0}^n \omega(\delta) \left( 1 + \frac{|x - \frac{k}{n}|^2}{\delta^2} \right) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\ &= \omega(\delta) \left( 1 + \frac{1}{\delta^2} (x^2 - 2xB_n(X)(x) + B_n(X^2)(x)) \right) \\ &\leq \omega(\delta) \left( 1 + \frac{1}{4n\delta^2} \right), \end{aligned}$$

d'après le calcul effectué en fin de question 11. En particulier pour  $\delta = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , après

passage au sup, on obtient que  $\|B_n(f) - f\| \leq \frac{5}{4} \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ .

Or, par composition des limites,  $\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , donc d'après le principe des gendarmes, on obtient à nouveau que  $B_n(f) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f$ .