

DS 7 : Théorème de Baire

Le barème comporte un total de 60 points.

Partie I : Continuité d'une dérivée. (sur 6 points)

1°) (sur 2 points)

◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $|g(x)| \leq x^2 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$. Ainsi, en posant $g(0) = 0$, g devient une application continue sur \mathbb{R} .

◇ g est de classe C^∞ sur \mathbb{R}^* d'après les théorèmes usuels.

On calcule, pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, $g'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$.

De plus, $\frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ (comme ci-dessus avec le principe des gendarmes), donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

◇ Supposons que g' est continue en 0. Alors $g'(x) \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} g'(0) = 0$, or on a vu que

$x \sin \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, donc $\cos \frac{1}{x} \xrightarrow[x \neq 0]{x \rightarrow 0} 0$. On en déduit par composition que $\cos t \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$, ce qui

est faux car $2n\pi \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\cos(2n\pi) = 1$. Ainsi, g' n'est pas continue en 0.

2°) (sur 3 points)

Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$ et $x \in \mathbb{R}$, posons $g_i(x) = g(x - a_i)$. Posons $h = \sum_{i=1}^n g_i$.

D'après la question précédente, h est dérivable sur \mathbb{R} .

On peut donc poser $f = h' = \sum_{i=1}^n g'_i$.

Posons $A = \{a_1, \dots, a_n\}$.

D'après les théorèmes usuels, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, g_i est de classe C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_i\}$, donc h est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus A$. En particulier, f est continue sur $\mathbb{R} \setminus A$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Supposons que f est continue en a_i .

Pour tout $j \in \mathbb{N}_n \setminus \{i\}$, g'_j est continue en a_i (car $a_i \neq a_j$), donc $f - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} g'_j$ est

continue en a_i . Or $f - \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} g'_j = g'_i$, donc g'_i est continue en a_i . Mais, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$g(x) = g_i(x + a_i)$, donc après dérivation, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = g'_i(x + a_i)$. On en déduit que g' est continue en 0, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f n'est pas continue en a_i . Ceci prouve que l'application f convient.

3°) (sur 1 point) h est dérivable, donc elle est continue sur \mathbb{R} .

On en déduit que h_n est continue sur \mathbb{R} , pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. $h_n(x) = \frac{h(x + \frac{1}{n}) - h(x)}{\frac{1}{n} - 0}$, or $\frac{h(x + t) - h(x)}{t - 0} \xrightarrow[t \neq 0]{t \rightarrow 0} h'(x) = f(x)$, donc par composition des limites, $h_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} f'(x)$.

Partie II : Suites de Cauchy (sur 9 points)

4°) (sur 2 points) Soit (x_n) une suite de Cauchy de X . Avec $\varepsilon = 1$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|x_p - x_q\| \leq 1$. En particulier, d'après le corollaire de l'inégalité triangulaire, pour tout $n \geq N$, $\|x_n\| \leq 1 + \|x_N\|$.

Posons $M = \max(1 + \|x_N\|, \max_{0 \leq n < N} \|x_n\|)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\| \leq M$, ce qui prouve que la suite (x_n) est bornée.

5°) (sur 1 point) Soit $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \ell \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\|x_n - \ell\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $p, q \geq N$. Alors $\|x_p - x_q\| = \|(x_p - \ell) + (\ell - x_q)\| \leq \|x_p - \ell\| + \|x_q - \ell\| \leq \varepsilon$.

Ainsi, la suite (x_n) est bien une suite de Cauchy.

6°) (sur 4 points)

Pour ce corrigé, on notera d la distance associée à la norme $\|\cdot\|$ de E ou de F .

◇ Supposons que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^* \forall N \in \mathbb{N} \exists n \geq N \ d(x_n, a) \leq \varepsilon$.

Avec $\varepsilon = 1$ et $N = 0$, il existe $\varphi(0) \geq 0$ tel que $d(x_{\varphi(0)}, a) \leq 1$.

Puis avec $\varepsilon = \frac{1}{2}$ et $N = \varphi(0) + 1$, il existe $\varphi(1) > \varphi(0)$ tel que $d(x_{\varphi(1)}, a) \leq \frac{1}{2}$.

Pour $k \geq 1$, supposons construits $\varphi(0), \varphi(1), \dots, \varphi(k)$ des entiers tels que

$\varphi(0) < \varphi(1) < \dots < \varphi(k)$ et $\forall h \in \{0, \dots, k\} \ d(x_{\varphi(h)}, a) \leq \frac{1}{h+1}$.

Avec $\varepsilon = \frac{1}{k+2}$ et $N = \varphi(k) + 1$, il existe $\varphi(k+1) > \varphi(k)$ tel que $d(x_{\varphi(k+1)}, a) \leq \frac{1}{k+2}$.

On construit ainsi une application $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, strictement croissante telle que

$\forall n \in \mathbb{N} \ d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \frac{1}{n+1} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$.

$x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$, donc a est une valeur d'adhérence de la suite (x_n) .

◇ Réciproquement, supposons que a est une valeur d'adhérence de (x_n) .

Il existe $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante telle que $x_{\varphi(n)} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a$.

Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$. Il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq M$, $d(x_{\varphi(n)}, a) \leq \varepsilon$.

On montre facilement par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$ (en effet,

$\varphi(0) \in \mathbb{N}$, donc $\varphi(0) \geq 0$ et si pour $k \in \mathbb{N}$, $\varphi(k) \geq k$, alors $\varphi(k+1) > \varphi(k) \geq k$, donc $\varphi(k+1) \geq k+1$).

Posons $n = \varphi(\max(M, N))$.

Comme $\max(M, N) \geq M$, $d(x_n, a) = d(x_{\varphi(\max(M, N))}, a) \leq \varepsilon$ et $n \geq \max(M, N) \geq N$. On a donc montré qu'il existe $n \geq N$ tel que $d(x_n, a) \leq \varepsilon$.

7°) (sur 2 points) On suppose que E est de dimension finie. Soit (x_n) une suite de Cauchy de E . D'après la question 4, c'est une suite bornée. D'après le théorème de Bolzano-Weierstrass, (x_n) possède une valeur d'adhérence $a \in E$.

Soit $\varepsilon > 0$. (x_n) est une suite de Cauchy, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

D'après la question précédente, il existe $n_0 \geq N$ tel que $d(x_{n_0}, a) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Soit $n \geq N$. Alors $d(x_n, a) \leq d(x_n, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, a) \leq \varepsilon$, ce qu'il fallait démontrer.

Partie III : Diamètre et continuité. (sur 12 points)

8°) (sur un point pour les deux questions 8 et 9)

A est non vide, donc $\{d(x, y) / x, y \in A\}$ est une partie non vide de \mathbb{R} . Si cette partie est majorée, d'après la propriété de la borne supérieure de \mathbb{R} , elle possède une borne supérieure dans \mathbb{R} . Sinon, $+\infty$ est son seul majorant dans $\overline{\mathbb{R}}$, donc on peut dire que cette partie admet $+\infty$ comme borne supérieure. Ainsi, dans tous les cas, $\delta(A)$ est correctement défini.

9°) B est nécessairement non vide car elle contient A , donc $\delta(B)$ est définie.

$\{d(x, y) / x, y \in A\} \subset \{d(x, y) / x, y \in B\}$, donc $\delta(B)$ est un majorant de $\{d(x, y) / x, y \in A\}$, or $\delta(A)$ est le plus petit des majorants (dans $\overline{\mathbb{R}}$) donc $\delta(B) \geq \delta(A)$.

10°) (sur 1 point) Notons $B = B_o^X(a, r)$. Pour tout $x, y \in B$,

(1) : $d(x, y) \leq d(x, a) + d(a, y) \leq r + r = 2r$, donc $2r$ majore $\{d(x, y) / x, y \in B\}$, or $\delta(B)$ est le plus petit des majorants, donc (2) : $\delta(B) \leq 2r$. Par la suite, pour déduire (2) de (1), on dira simplement que l'on passe au sup.

11°) (sur 1 point)

D'après le cours, $X \in \mathcal{V}(x)$, donc $\mathcal{V}(x) \neq \emptyset$. Ainsi, $\{\delta(f(V)) / V \in \mathcal{V}(x)\}$ est une partie non vide de $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, minorée par 0. Notons Ω cette partie.

Si $\Omega = \{+\infty\}$, alors $\inf \Omega$ est défini, c'est même un minimum, égal à $+\infty$.

Sinon, alors $\Omega \setminus \{+\infty\}$ est une partie non vide minorée de \mathbb{R} , donc d'après la propriété de la borne inférieure de \mathbb{R} , on peut poser $\omega = \inf(\Omega \setminus \{+\infty\})$. On vérifie alors que ω est un minorant de Ω dans $\overline{\mathbb{R}}$ et que c'est le plus grand. Ainsi, dans ce cas, $\omega = \inf \Omega$. En conclusion, dans tous les cas, $\inf(\{\delta(f(V)) / V \in \mathcal{V}(x)\})$ est défini, en tant qu'élément de $\overline{\mathbb{R}}$, ce qu'il fallait démontrer.

12°) (sur 4 points) \diamond Supposons que f est continue en x_0 . Soit $\varepsilon > 0$.

Il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$, $\|x_0 - x\| < \alpha \implies \|f(x_0) - f(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Posons $V = B_o^X(x_0, \alpha)$. Alors $V \in \mathcal{V}(x_0)$ et $f(V) \subset B_o^Y(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})$, donc d'après les deux questions précédentes, $\delta(f(V)) \leq \delta(B_o^Y(f(x_0), \frac{\varepsilon}{2})) \leq \varepsilon$. On en déduit que $\omega(f, x_0) \leq \varepsilon$, pour tout $\varepsilon > 0$, donc $\omega(f, x_0) = 0$.

\diamond Supposons que $\omega(f, x_0) = 0$.

Soit $\varepsilon > 0$. ε n'est pas un minorant de $\{\delta(f(V)) / V \in \mathcal{V}(x_0)\}$, car le plus grand des minorants est 0, donc il existe $V \in \mathcal{V}(x_0)$ tel que $\delta(f(V)) < \varepsilon$.

V est un voisinage relatif de x_0 dans X , donc il existe un voisinage W dans E de x_0 tel que $V = W \cap X$.

Par définition d'un voisinage, il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^E(x_0, \alpha) \subset W$.

Soit maintenant $x \in X$ tel que $\|x - x_0\| < \alpha$. Alors $x \in (B_o^E(x_0, \alpha) \cap X) \subset W \cap X = V$, donc $f(x) \in f(V)$ et pour les mêmes raisons, $f(x_0) \in f(V)$.

Alors $\|f(x_0) - f(x)\| = d(f(x_0), f(x)) \leq \delta(f(V)) < \varepsilon$.

Ceci démontre que f est continue en x_0 .

13°) (sur 4 points) Notons $\Omega = \{x \in X / \omega(f, x) < \varepsilon\}$.

Soit $x \in \Omega$. Alors $\omega(f, x) < \varepsilon$, donc il existe un voisinage V de x , relatif à X , tel que $\delta(f(V)) < \varepsilon$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^X(x, \alpha) \subset V$. Posons $U = B_o^X(x, \alpha)$.

Soit $y \in U$. U est un ouvert relatif de X , donc $U \in \mathcal{V}(y)$. Ainsi, $\omega(f, y) \leq \delta(f(U))$, or $U \subset V$, donc $f(U) \subset f(V)$, donc d'après la question 9, $\omega(f, y) \leq \delta(f(V)) < \varepsilon$.

Ainsi $y \in \Omega$, pour tout $y \in U$. Ceci prouve que $U \subset \Omega$, or $U = B_o^X(x, \alpha) \in \mathcal{V}(x)$, donc $\Omega \in \mathcal{V}(x)$, pour tout $x \in \Omega$. Ceci prouve que Ω est un ouvert relatif de X .

Partie IV : Lemme de Baire (sur 20 points)

14°) a) (sur 2 points) Soit $\varepsilon > 0$.

$\delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $n \geq N$, $\delta(F_n) \leq \varepsilon$.

Soit $p, q \in \mathbb{N}$ tels que $p \geq N$ et $q \geq N$. Alors $x_p \in F_p \subset F_N$ et de même, $x_q \in F_N$, donc $d(x_p, x_q) \leq \delta(F_N) \leq \varepsilon$. Ainsi, (x_n) est une suite de Cauchy.

14°) b) (sur 3 points) X est complet donc il existe $\ell \in X$ tel que $x_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \ell$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $p \geq n$, $x_p \in F_p \subset F_n$, donc la suite $(x_p)_{p \geq n}$ est une suite du fermé F_n , qui converge vers ℓ . Ainsi, d'après la caractérisation séquentielle des fermés, $\ell \in F_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. On a montré que $\{\ell\} \subset \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors x et ℓ sont tous deux dans F_n ,

donc $0 \leq d(x, \ell) \leq \delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le principe des gendarmes, $d(x, \ell) = 0$, donc

$x = \ell$. On a montré que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n = \{\ell\}$, c'est bien un singleton.

15°) (sur 2 points) $U \neq \emptyset$, donc il existe $x \in U$. U est ouvert, donc $U \in \mathcal{V}(x)$ (sauf précision du contraire, on utilise toujours la topologie induite sur X). Mais U_0 est dense dans X , donc $x \in \overline{U_0}$. Ainsi, $U \cap U_0$ est non vide. Il existe $x_0 \in U \cap U_0$. De plus, $U \cap U_0$ est un ouvert, en tant qu'intersection de deux ouverts, donc il existe $r_0 > 0$ tel que $B_o^X(x_0, 2r_0) \subset U \cap U_0$. Alors $B_f^X(x_0, r_0) \subset U \cap U_0$.

16°) (sur 2 points)

U_{n+1} est dense dans X , donc $x_n \in \overline{U_{n+1}}$. De plus, $B_o^X(x_n, r_n) \in \mathcal{V}(x_n)$, donc $U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$ est non vide : il existe $x_{n+1} \in U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$.

De plus, $U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$ est un ouvert, donc il existe $r > 0$

tel que $B_o^X(x_{n+1}, r) \subset U_{n+1} \cap B_o^X(x_n, r_n)$.

Posons $r_{n+1} = \min\left(\frac{r}{2}, \frac{r_n}{2}\right)$. Alors $r_{n+1} \leq \frac{r_n}{2}$ et $B_f^X(x_{n+1}, r_{n+1}) \subset U_{n+1} \cap B_f^X(x_n, r_n)$.

17° (sur 4 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $F_n = B_f^X(x_n, r_n)$. Alors (F_n) est une suite de fermés, décroissante au sens de l'inclusion. De plus, d'après la question 10, sachant que

$F_n \subset B_o^X(x_n, 2r_n)$, $\delta(F_n) \leq 4r_n$. Or on montre facilement par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $r_n \leq \frac{r_0}{2^n}$, donc $r_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$. D'après le principe des gendarmes, $\delta(F_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

Alors, d'après la question 14.b, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est un singleton.

En particulier, il existe $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x \in F_n \subset U_n$ et $x \in F_0 \subset U$, donc $x \in U \cap \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$.

Ainsi, si l'on pose $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$, on a montré que, pour tout ouvert U , $A \cap U \neq \emptyset$.

Soit alors $x \in X$. Soit $V \in \mathcal{V}(x)$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $B_o^X(x, \alpha) \subset V$, or $B_o^X(x, \alpha)$ est un ouvert, donc $A \cap B_o^X(x, \alpha) \neq \emptyset$, donc $A \cap V \neq \emptyset$, pour tout $V \in \mathcal{V}(x)$, ce qui montre que $x \in \overline{A}$. C'est vrai pour tout $x \in X$, donc A est dense dans X . Ainsi, on a montré que si $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'ouverts relatifs de X denses dans X , alors $A = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$

est une partie de X dense dans X .

18° (sur 3 points) On suppose que $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille de fermés de X qui sont tous d'intérieurs vides et on pose $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Alors $X \setminus F = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n)$, or d'après le cours, pour la topologie de X , pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $\overline{X \setminus F_n} = X \setminus \overset{\circ}{F_n} = X$, car par hypothèse, $\overset{\circ}{F_n} = \emptyset$, donc $(X \setminus F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille d'ouverts de X qui sont denses dans X . D'après la question précédente, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} (X \setminus F_n) = X \setminus F$ est dense dans X , donc $X = \overline{X \setminus F} = X \setminus \overset{\circ}{F}$, donc $\overset{\circ}{F} = \emptyset$, ce qu'il fallait démontrer.

19° (sur 4 points) Soit Ω un ouvert de X .

La question 18 se déduit de la question 17 pour n'importe quelle partie X de E , on n'utilise aucune hypothèse sur X , donc il suffit de montrer que le résultat de la question 17 reste vrai en remplaçant X par U , ce sera alors également vrai pour la question 18. Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une famille d'ouverts relatifs de Ω , denses dans Ω .

En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n est un ouvert relatif de X .

Sauf précision du contraire, on utilise la topologie relative à X .

Soit $n \in \mathbb{N}$, posons $V_n = U_n \cup (X \setminus \overline{\Omega})$. V_n est un ouvert de X , en tant que réunion d'ouverts. De plus d'après le cours, l'adhérence d'une union finie est égale à la réunion des adhérences, donc $\overline{V_n} = \overline{U_n} \cup \overline{X \setminus \overline{\Omega}}$, or U_n est dense dans Ω , donc $\overline{U_n} \supset \Omega$, puis $\overline{\Omega} \subset \overline{\overline{U_n}} = \overline{U_n}$, donc $\overline{V_n} \supset \overline{\Omega} \cup (X \setminus \overline{\Omega}) = X$.

Ainsi, (V_n) est une suite d'ouverts de X qui sont tous denses dans X . D'après la question 17, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n$ est dense dans X , or par distributivité, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n = (X \setminus \overline{\Omega}) \cup \left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n \right)$. On en

déduit que $X = \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} V_n} = \overline{X \setminus \overline{\Omega}} \cup \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n}$. Mais $(X \setminus \overline{\Omega}) \subset X \setminus \Omega$ et $X \setminus \Omega$ est fermé,

donc $\overline{X \setminus \overline{\Omega}} \subset X \setminus \Omega$. Ainsi, si $x \in \Omega$, $x \notin \overline{X \setminus \overline{\Omega}}$, donc $x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$. On a prouvé que

$\Omega \subset \overline{\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n}$, donc que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_n$ est dense dans Ω .

Partie V : Théorème de la limite simple de Baire. (sur 14 points)

20° (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Soit $m \in \mathbb{N}$. Pour tout $x \in X$, posons $g_m(x) = \|f_m(x) - f_n(x)\|$. Alors d'après les théorèmes usuels, g_m est une application continue de X dans \mathbb{R} , donc $g_m^{-1}([0, \varepsilon])$ est un fermé relatif de X , en tant qu'image réciproque d'un fermé par une application continue. Or $g_m^{-1}([0, \varepsilon]) = \{x \in X / \|f_n(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon\}$, donc $F_n = \bigcap_{m \geq n} g_m^{-1}([0, \varepsilon])$.

Ainsi, F_n est un fermé en tant qu'intersection (même infinie) de fermés.

21° (sur 2 points) Soit $x \in X$. La suite $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente dans X , donc d'après la question 5, c'est une suite de Cauchy. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que, pour tout $p, q \geq N$, $\|f_p(x) - f_q(x)\| \leq \varepsilon$. En particulier, pour tout $m \geq N$, $\|f_N(x) - f_m(x)\| \leq \varepsilon$, donc $x \in F_N$. Ainsi, $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$, ce qui montre que $X = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ (l'inclusion réciproque étant évidente).

22° (sur 1 point) Supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, F_n soit d'intérieur vide. C'est une suite de fermés, donc d'après la question 18, $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$ est aussi d'intérieur vide. Alors

d'après la question précédente, l'intérieur de X est vide, pour la topologie relative de X , or pour cette topologie, X est ouvert, donc est égal à son intérieur. On en déduit que X est vide, ce qui est faux par hypothèse. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est non vide.

23° (sur 1 point)

Soit $x \in W$. Alors $x \in F_N$, donc pour tout $m \geq N$, $\|f_m(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$. On fait tendre m vers $+\infty$. Par hypothèse, $f_m(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$, donc l'inégalité précédente donne :

$$\|f(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon.$$

24°) (sur 2 points)

f_N est continue en x_0 , donc il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $x \in X$,

$$\|x - x_0\| < \alpha \implies \|f_N(x) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon.$$

Posons $U = W \cap B_o^X(x_0, \alpha)$. U est un ouvert en tant qu'intersection d'ouverts et on a bien $x_0 \in U \subset W$.

Soit $x \in U$. Alors $\|f_N(x) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$. De plus, $x \in W$ et $x_0 \in W$, donc d'après la question précédente, $\|f(x) - f_N(x)\| \leq \varepsilon$ et $\|f(x_0) - f_N(x_0)\| \leq \varepsilon$.

Alors, par inégalité triangulaire,

$$\|f(x) - f(x_0)\| = \|(f(x) - f_N(x)) + (f_N(x) - f_N(x_0)) + (f_N(x_0) - f(x_0))\| \leq 3\varepsilon.$$

25°) (sur 3 points) W est non vide, donc il existe $x_0 \in W$. D'après la question précédente, il existe donc un ouvert U relatif de X , tel que $x_0 \in U \subset W$ et tel que, pour tout $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon$.

Alors, pour tout $x, y \in U$, par inégalité triangulaire,

$$\|f(x) - f(y)\| \leq \|f(x) - f(x_0)\| + \|f(x_0) - f(y)\| \leq 6\varepsilon.$$

Ainsi, $U \in \mathcal{V}(x_0)$ et $\delta(f(U)) \leq 6\varepsilon$. On en déduit que $\omega(f, x_0) \leq 6\varepsilon$, donc $x_0 \in \Omega_{7\varepsilon}$.

On a donc prouvé que, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_{7\varepsilon} \neq \emptyset$. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, $\Omega_\varepsilon = \Omega_{7\frac{\varepsilon}{7}} \neq \emptyset$.

26°) (sur 1 point) Soit Ω un ouvert non vide de X .

On fixe $\varepsilon > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\text{on pose } F_n = \{x \in \Omega / \forall m \geq n, \|f_m(x) - f_n(x)\| \leq \varepsilon\}.$$

On reprend et on adapte les raisonnements des questions précédentes : les questions 20 et 21 s'adaptent, donc les F_n sont des fermés relatifs de Ω dont l'union est égale à Ω .

D'après la question 19, Ω étant un ouvert, on peut adapter la question 22 : il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur de F_N est vide, pour la topologie de Ω . Alors il existe un ouvert non vide W relatif à Ω tel que $W \subset F_N$. Ω étant ouvert relativement à X , W est aussi un ouvert relatif de X .

La question 23 s'adapte mot pour mot puis la question 24 fournit un ouvert U relatif à X , tel que $x_0 \in U \subset W$ et tel que, pour tout $x \in U$, $\|f(x) - f(x_0)\| \leq 3\varepsilon$.

La question 25, une fois adaptée, montre alors que, $\Omega_\varepsilon \cap \Omega \neq \emptyset$.

Ainsi, Ω_ε rencontre tout ouvert non vide de X . Comme en fin de question 17, on en déduit que Ω_ε est dense dans X .

27°) (sur 2 points) D'après la question 12, pour tout $x \in X$,

$$x \in C \iff \omega(f, x) = 0 \iff \forall n \in \mathbb{N}^*, \omega(f, x) < \frac{1}{n}, \text{ donc } C = \bigcap_{n \in \mathbb{N}^*} \Omega_{\frac{1}{n}}.$$

Or d'après les questions 13 et 26, $(\Omega_{\frac{1}{n}})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite d'ouverts de X qui sont tous denses dans X . Alors, d'après le lemme de Baire, valable car X est supposé complet, C est dense dans X .