Résumé de cours :
Semaine 26, du 22 avril au 26.

Les polynômes (fin)

1 Polynômes scindés (fin)

Cette fin de paragraphe est hors programme.

Définition. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme à n indéterminées. On dit que A est symétrique si et seulement si, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $A(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)}) = A(X_1, \ldots, X_n)$.

Exemples. Les polynômes de Newton : $X_1^p + \cdots + X_n^p$, où $n, p \in \mathbb{N}^*$ sont symétriques.
Les polynômes symétriques élémentaires : pour tout $p \in \{1, \ldots, n\}$,
$\Sigma_p(X_1, \ldots, X_n) = \displaystyle\sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n} X_{i_1} \times \cdots \times X_{i_p}$ est bien un polynôme symétrique.

Propriété. (Admise) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que A est un polynôme symétrique de $\mathbb{L}[X_1, \ldots, X_n]$ (où $\mathbb{L}$ est un corps). Alors il existe $B \in \mathbb{L}[X_1, \ldots, X_n]$ tel que $A = B(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_n)$.

Corollaire. Avec ces notations, si $\mathbb{K}$ est un sur-corps de $\mathbb{L}$ et si $P \in \mathbb{L}[X]$ est scindé dans $\mathbb{K}[X]$, alors en notant $\beta_1, \ldots, \beta_n$ les racines de P comptées avec multiplicité, $A(\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{L}$.

Exemple. Soit $P \in \mathbb{Q}[X]$ un polynôme dont les racines complexes comptées avec multiplicité sont notées $\beta_1, \ldots, \beta_n$. Alors pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\beta_1^p + \cdots + \beta_n^p \in \mathbb{Q}$.

Les fractions rationnelles

2 Corps des fractions d'un anneau intègre

Théorème. Soit A un anneau intègre. Il existe un corps K, unique à un isomorphisme près, tel que A est un sous-anneau de K, et tel que tout élément de K peut s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ où $(a, b) \in A^2$ avec $b \neq 0$. a est appelé le numérateur et b le dénominateur de l'écriture $\dfrac{a}{b}$.
K est appelé le ***corps des fractions*** de A. C'est le plus petit corps contenant A.

3 Forme irréductible

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

Définition. On note $\mathbb{K}(X)$ le corps des fractions de l'anneau intègre $\mathbb{K}[X]$. Les éléments de $\mathbb{K}(X)$ sont appelés des fractions rationnelles en l'indéterminée X.

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
$\dfrac{P}{Q}$ est un représentant irréductible de F si et seulement si $F = \dfrac{P}{Q}$ et si $P \wedge Q = 1$.
$\dfrac{P}{Q}$ est un représentant unitaire de F si et seulement si $F = \dfrac{P}{Q}$ et si S est unitaire.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$.
F possède un unique représentant irréductible et unitaire. Si on le note $\dfrac{P}{Q}$, alors
les représentants irréductibles de F sont les $\dfrac{\lambda P}{\lambda Q}$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$,
et les représentants quelconques de F sont les $\dfrac{LP}{LQ}$ où $L \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$.
Il faut savoir le démontrer.

4 Degré

Définition. $\deg\left(\dfrac{P}{Q}\right) \triangleq \deg(P) - \deg(Q) \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$.

Propriété. Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$.
- $\deg(F+G) \le \max(\deg(F), \deg(G))$, avec égalité lorsque $\deg(F) \neq \deg(G)$.
  Il faut savoir le démontrer.
- $\deg(FG) = \deg(F) + \deg(G))$.
- $\deg(FG^{-1}) = \deg(F) - \deg(G))$.

5 Racines et pôles

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible** $\dfrac{A}{B}$.
- Les racines de F sont les racines de A. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, a est une racine de F de multiplicité m si et seulement si a est racine de A de multiplicité m.
- Les pôles de F sont les racines de B. Pour tout $a \in \mathbb{K}$ et $m \in \mathbb{N}$, a est un pôle de F de multiplicité m si et seulement si a est racine de B de multiplicité m.

Définition. Si $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{F} = \dfrac{\overline{P}}{\overline{Q}}$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}(X) & \longrightarrow & \mathbb{C}(X) \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$ est un isomorphisme de corps.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{C}(X)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. α est racine (resp : pôle) de F de multiplicité m si et seulement si $\overline{\alpha}$ est racine (resp : pôle) de $\overline{F}$ de multiplicité m.

Corollaire. Si $F \in \mathbb{R}(X)$ et si α est racine de F (resp : racine de multiplicité m), alors $\overline{\alpha}$ est aussi une racine de F (resp : racine de multiplicité m).

6 Fonctions rationnelles

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant pour représentant **irréductible** $\dfrac{A}{B}$.
Notons $\mathcal{P}$ l'ensemble de ses pôles.

La fonction rationnelle associée à F est l'application $\begin{array}{rccc} \tilde{F}: & \mathbb{K}\setminus\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\tilde{A}(x)}{\tilde{B}(x)} \end{array}$.

Propriété. Si deux fractions rationnelles coïncident pour une infinité de valeurs de $\mathbb{K}$, elles sont égales.
Il faut savoir le démontrer.

7 Composition

Définition. Si $P = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$, $P \circ F = P(F) \triangleq \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n F^n$.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$,
l'application $P \longmapsto P(F)$ est un morphisme d'anneaux de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$.

Lemme : Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $F \in \mathbb{K}(X)$. Si $P \neq 0$ et si $F \notin \mathbb{K}$, alors $P \circ F \neq 0$.

Définition. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$.
Si $F = \dfrac{P}{Q}$, alors on pose $F \circ G = F(G) = \dfrac{P(G)}{Q(G)}$.

Propriété. Pour tout $G \in \mathbb{K}(X) \setminus \mathbb{K}$, $F \longmapsto F(G)$ est un endomorphisme du corps $\mathbb{K}(X)$.

8 Dérivation

Définition. Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On pose $F' \triangleq \dfrac{P'Q - Q'P}{Q^2} \in \mathbb{K}(X)$.

Définition. Par récurrence, on peut définir la dérivée n-ième formelle d'une fraction rationnelle.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{R}(X)$ et $n \in \mathbb{N}$, $\widetilde{F^{(n)}} = \tilde{F}^{(n)}$.

Propriété. Pour tout $F \in \mathbb{K}(X)$, $\deg(F') \leq \deg(F) - 1$,
avec égalité lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$ et $\deg(F) \notin \{0, -\infty\}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $a \in \mathbb{K}$ et $n \in \mathbb{N}$.
- $(F+G)' = F' + G'$, et plus généralement, $(F+G)^{(n)} = F^{(n)} + G^{(n)}$.
- $(aF)' = aF'$, et plus généralement, $(aF)^{(n)} = aF^{(n)}$.
- $(FG)' = F'G + FG'$.
- Si $G \neq 0$, $\left(\dfrac{F}{G}\right)' = \dfrac{F'G - G'F}{G^2}$.

Propriété. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $F_1, \ldots, F_n \in \mathbb{K}(X)$, $(F_1 \times \cdots \times F_n)' = \sum_{i=1}^{n} F_i' \prod_{j\neq i} F_j$.

Formule de Leibniz : $(FG)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} F^{(k)} G^{(n-k)}$.

Propriété. Pour tout $F, G \in \mathbb{K}(X)$, avec $G \notin \mathbb{K}$, $(F \circ G)' = G' \times (F' \circ G)$.

9 Décomposition en éléments simples.

9.1 Partie entière

Définition. Un élément simple de $\mathbb{K}(X)$ est une fraction rationnelle de la forme $\frac{P}{Q^m}$, où $m \in \mathbb{N}^*$ et $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec Q irréductible et $\deg(P) < \deg(Q)$.

Propriété de la partie entière : Soit $F = \frac{A}{S} \in \mathbb{K}(X)$. Il existe un unique couple $(E, B) \in \mathbb{K}[X]^2$ tel que $F = E + \frac{B}{S}$ avec $\deg(B) < \deg(S)$. De plus, si $\frac{A}{S}$ est irréductible alors $\frac{B}{S}$ l'est également.
E est la *partie entière* de F.
Il faut savoir le démontrer.

9.2 Divisions successives

Méthode des divisions successives pour décomposer en éléments simples une fraction de la forme $\frac{B}{S^m}$ où S est un polynôme irréductible de $\mathbb{K}[X]$:
A connaître.

9.3 Le théorème

Théorème de décomposition en éléments simples :
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme $F = \frac{A}{{S_1}^{m_1} {S_2}^{m_2} \cdots {S_n}^{m_n}}$, où $S_1, S_2, \dots, S_n$ sont des polynômes irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille $(T_{i,j})_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le m_i}}$ de polynômes de $\mathbb{K}[X]$ tels que $F = E + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{T_{i,j}}{{S_i}^j} \Big)$ avec pour tout $i \in [\![1; n]\!]$ et $j \in [\![1; m_i]\!]$, $\deg(T_{i,j}) < \deg(S_i)$.
Cette égalité s'appelle la décomposition en éléments simples de F sur $\mathbb{K}$.
Le polynôme E est la *partie entière* de F.
Pour $i \in [\![1; n]\!]$, la somme $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{T_{i,j}}{{S_i}^j}$ s'appelle la partie polaire de F relative au polynôme S_i.

9.4 Dérivée logarithmique

Propriété. Soit P un polynôme scindé dans $\mathbb{K}[X]$. Alors, en notant $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P et $m_1, \dots, m_n$ leurs multiplicités respectives, $\frac{P'}{P} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{X - \alpha_i}$.

Il faut savoir le démontrer.

9.5 Dans $\mathbb{C}(X)$ et $\mathbb{R}(X)$

Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$:
Soit $F \in \mathbb{C}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme $F = \frac{A}{(X - \alpha_1)^{m_1} \cdots (X - \alpha_n)^{m_n}}$, où $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des poles de F, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ sont leurs multiplicités

et $A \in \mathbb{K}[X]$. Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et une unique famille $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m_i}}$ de complexes tels que $F = E + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} \Big)$.

Pour $i \in [\![1; n]\!]$, la somme $\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-a_i)^j}$ est la partie polaire de F relative au pôle α_i.

Théorème de décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$:
Soit $F \in \mathbb{R}(X)$. On peut toujours écrire F sous la forme

$$F = \frac{A}{\Big(\prod_{i=1}^{n}(X-a_i)^{m_i}\Big) \times \Big(\prod_{i=1}^{p}(X^2+b_iX+c_i)^{k_i}\Big)},$$

où $a_1, \dots, a_n$ sont des poles réels de F, $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^*$ sont leurs multiplicités, où pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$, $b_i, c_i \in \mathbb{R}$ avec $b_i^2 - 4c_i < 0$ et où $A \in \mathbb{K}[X]$.
Alors il existe un unique $E \in \mathbb{K}[X]$ et trois uniques familles $(\lambda_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq n\\ 1\leq j\leq m_i}}$, $(f_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq k_i}}$ et $(g_{i,j})_{\substack{1\leq i\leq p\\ 1\leq j\leq k_i}}$ de réels tels que $F = E + \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{m_i} \frac{\lambda_{i,j}}{(X-\alpha_i)^j} \Big) + \sum_{i=1}^{p} \Big(\sum_{j=1}^{k_i} \frac{f_{i,j}X+g_{i,j}}{(X^2+b_iX+c_i)^j} \Big)$.

Méthode : En pratique, pour décomposer une fraction rationnelle F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ ou dans $\mathbb{C}(X)$,

1. on commence par l'écrire sous forme irréductible unitaire, $F = \frac{A}{B}$.
2. En effectuant la division euclidienne de A par B, on écrit $F = E + \frac{C}{B}$, où E est la partie entière de F. Lorsque $\deg(F) < 0$, il est évident que $E = 0$, donc on peut supprimer cette étape.
3. On scinde B en produit de polynômes irréductibles unitaires.
4. On écrit la DES de $\frac{C}{B}$ à l'aide de coefficients indéterminés.
5. On calcule ces coefficients indéterminés.

9.6 Quelques techniques de DES

Remarque. La technique des divisions euclidiennes successives est adaptée à la DES de fractions de la forme $\frac{P}{Q^m}$, où Q est irréductible.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ et soit $\alpha \in \mathbb{K}$ un pôle de F de multiplicité $m \in \mathbb{N}^*$. Alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = [\widetilde{(X-\alpha)^m} F](\alpha)$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ une fraction rationnelle admettant un pôle simple α.
Si $\frac{A}{S}$ est un représentant irréductible de F, alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{X-\alpha}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = \frac{\tilde{A}(\alpha)}{\tilde{S}'(\alpha)}$.

Il faut savoir le démontrer.

Généralisation : (hors programme) On suppose que $\mathrm{car}(\mathbb{K}) = 0$.
Soit $F \in \mathbb{K}(X)$ dont $a \in \mathbb{K}$ est l'un des pôles,de multiplicité m. Si $\frac{A}{S}$ est un représentant irréductible de F, alors le coefficient λ de l'élément simple $\frac{1}{(X-\alpha)^m}$ dans la DES de F vérifie $\lambda = \frac{m!\tilde{A}(\alpha)}{\widetilde{S^{(m)}}(\alpha)}$.

Utilisation d'un développement limité : Soit $F \in \mathbb{C}(X)$ et a un pôle de F de multiplicité m.
On peut écrire la DES de F sous la forme $F(X) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{(X-a)^i} + G(X)$. La fonction rationnelle associée à G est continue en a, donc au voisinage de a, $(t-a)^m F(t) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (t-a)^{m-i} + O((t-a)^m)$.
On peut donc calculer les λ_i en effectuant un développement limité de $(t-a)^m F(t)$ au voisinage de a puis en invoquant l'unicité du développement limité.

10 Application des fractions rationnelles au calcul intégral

10.1 Primitives d'une fraction rationnelle

Si $F \in \mathbb{R}(X)$, pour calculer $\int F(t)dt$, on décompose F en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$.
On est ainsi ramené au problème du calcul des primitives des éléments simples de $\mathbb{R}(X)$:
Lorsque $F(X) = \frac{aX+b}{(X^2+cX+d)^\alpha}$, avec $\Delta = c^2 - 4d < 0$, À connaître :
on décompose le calcul de $\int F(t)dt$ en celui de $\int \frac{u'(t)}{u(t)^\alpha}\, dt$, où $u(t) = t^2 + ct + d$, et celui de $\int \frac{dt}{u(t)^\alpha}$.
Pour ce dernier, on écrit $X^2 + cX + d = (X + \frac{c}{2})^2 + d - \frac{c^2}{4} = (X-p)^2 + q^2$
et on se ramène au calcul de $\int \frac{dt}{(1+t^2)^\alpha}$, que l'on réalise en posant $t = \tan u$.

10.2 Fonctions rationnelles de sin et cos : hors programme

Pour calculer $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$, où $R \in \mathbb{R}(X, Y)$:

Cas particulier. $\int \sin^p t \cos^q t\, dt$, avec p et q pairs. C'est le seul cas où on linéarise.

Cas général. On pose $u = \tan \frac{t}{2}$ pour se ramener à une primitive de fraction rationnelle.

Les règles de Bioche. Notons $f : t \longmapsto R(\sin t, \cos t)$.
Si $f(-t)d(-t) = f(t)dt$, on posera $x = \cos t$ (On a $\cos(-t) = \cos t$) ,
Si $f(\pi - t)d(\pi - t) = f(t)dt$, on posera $x = \sin t$ (On a $\sin(\pi - t) = \sin t$) ,
Si $f(\pi + t)d(\pi + t) = f(t)dt$, on posera $x = \tan t$ (On a $\tan(\pi + t) = \tan t$).
Si deux des trois relations précédentes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi. On pose alors $x = \sin^2 t$ ou $x = \cos(2t)$.

10.3 Fonctions rationnelles en sh et ch : hors programme

Pour calculer $\int R(\mathrm{sh} t, \mathrm{ch} t)\, dt$, où $R \in \mathbb{R}(X, Y)$, on regarde quel procédé serait utilisé pour le calcul de $\int R(\sin t, \cos t)\, dt$ et on le transpose en trigonométrie hyperbolique.
Dans le cas général, on peut poser $x = e^t$.