

DS 8

Les calculatrices sont interdites.

Exercices

Exercice 1 :

Déterminer la nature de la série $\sum \frac{\text{ch}(2n)}{\text{sh}(3n)}$.

Exercice 2 :

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.

Exercice 3 :

Donner un équivalent simple au voisinage de 0 et de $+\infty$ de $\ln(3x^3 - 3 \cos x + 4)$.

Exercice 4 :

Soit (u_n) une suite définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n \frac{1 + u_n}{1 + 2u_n}$.

Étudiez (u_n) et donnez un équivalent de u_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème : Fonctions absolument monotones

Lorsque I est un intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide,

si f est une application de I dans \mathbb{R} ,

- on dira que f est positive et on écrira $f \geq 0$ si et seulement si, pour tout $x \in I$, $f(x) \geq 0$;
- on dira que f est absolument monotone si et seulement si f est de classe C^∞ et si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$.

Partie I : Généralités

On fixe dans cette partie un intervalle I d'intérieur non vide.

1°) Si f est une application de I dans \mathbb{R} absolument monotone, montrer que f est positive, croissante et convexe.

2°) Si f et g sont deux applications de I dans \mathbb{R} absolument monotones, montrer que $f + g$ et fg sont également absolument monotones.

3°) Soit J un second intervalle de \mathbb{R} d'intérieur non vide. On suppose que f est une application de I dans \mathbb{R} et que g est une application de J dans I . Montrer que si f et g sont absolument monotones, alors $f \circ g$ est aussi absolument monotone.

Partie II : exemples

4°) Montrer que l'application tangente est absolument monotone sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

5°) Pour tout $x \in]0, 1[$, on pose $g(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{1}{1+x} \right)$.
Montrer que g est absolument monotone sur $]0, 1[$.

6°) En déduire que arcsin est absolument monotone sur $]0, 1[$.

Partie III : Fonctions totalement monotones

On note E l'ensemble des fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on note τ_h l'application de E dans E définie par :

pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\tau_h(f)(x) = f(x + h)$.

7°) Montrer que, pour tout $h \in \mathbb{R}$, τ_h est un automorphisme de l'espace vectoriel E .

Pour tout $h \in \mathbb{R}$, on pose $\Delta_h = \tau_h - Id_E$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note Δ_h^n la composée de Δ_h avec elle-même n fois.

8°) Montrer que pour tous $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x + kh).$$

9°) Soit $f \in E$. On suppose que f est dérivable. Montrer que,

pour tout $h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dh}(\Delta_h^{n+1}(f)(x)) = (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h)$.

Lorsque $f \in E$, on dira que f est totalement monotone si et seulement si pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$ et $n \in \mathbb{N}$, $\Delta_h^n(f) \geq 0$.

10°) Soit $f \in E$. On suppose que f est de classe C^∞ et qu'elle est absolument monotone sur \mathbb{R} . Montrer que f est totalement monotone.

Partie IV : totalement monotone \iff absolument monotone

11°) Pour $f \in E$ que l'on suppose de classe C^∞ , énoncer et démontrer la formule de Taylor avec reste intégral entre deux réels a et b .

12°) Soit $n \in \mathbb{N}$. Dédire du calcul des dérivées successives en 0 de l'application $t \mapsto (e^t - 1)^n$ que, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$,
$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} = \begin{cases} 0 & \text{si } j < n \\ 1 & \text{si } j = n \end{cases}.$$

13°) Soit $f \in E$ une application de classe C^∞ . On suppose que f est totalement monotone. Montrer que f est absolument monotone.

14°) Soit $f \in E$ une application que l'on suppose continue. On suppose également que, pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, $\Delta_h^2(f) \geq 0$. Montrer que f est convexe.

15°) Soit $f \in E$ que l'on suppose totalement monotone. Montrer que f est convexe.

Partie V : Développement en série entière

16°) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application absolument monotone de $]a, b[$ dans \mathbb{R} . Montrer que f se prolonge sur $[a, b[$ en une application absolument monotone. Peut-on également prolonger f sur $[a, b]$?

Soit b un réel strictement positif.

Sauf pour la dernière question, on suppose que f est une application absolument monotone de $[0, b[$ dans \mathbb{R} .

17°) En utilisant la formule de Taylor avec reste intégral, montrer que, pour tout $t \in [0, b[$, la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ est convergente.

Pour tout $t \in [0, b[$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $\rho_n(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) dx$.

18°) Soit $t, t' \in \mathbb{R}$ tels que $0 < t < t' < b$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{\rho_n(t)}{t^n} \leq \frac{\rho_n(t')}{t'^n}$.

19°) En déduire que f est développable en série entière sur $[0, b[$, c'est-à-dire qu'il existe une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de réels telle que, pour tout $t \in [0, b[$, $f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$.

20°) Soit $b \in \mathbb{R}_+^*$.

On suppose que f est une application absolument monotone de $] - b, b[$ dans \mathbb{R} .

Montrer que f est développable en série entière sur $] - b, b[$.