DS 8 : un corrigé

Le barème comporte un total de 58 points.

Exercices (sur 11 points)

Exercice 1 : (sur 1 point)

Lorsque x tend vers $+\infty$, $\mathrm{ch}(x) = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2} \sim \dfrac{e^x}{2}$ et $\mathrm{sh}(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \sim \dfrac{e^x}{2}$, donc par composition des limites, lorsque n tend vers $+\infty$, avec $n \in \mathbb{N}$,
$\dfrac{\mathrm{ch}(2n)}{\mathrm{sh}(3n)} \sim \dfrac{e^{2n}}{e^{3n}} = \left(\dfrac{1}{e}\right)^n > 0$. Or $\frac{1}{e} \in [0, 1[$, donc la série géométrique $\sum \left(\dfrac{1}{e}\right)^n$ est convergente. Alors, d'après le cours, la série $\sum \dfrac{\mathrm{ch}(2n)}{\mathrm{sh}(3n)}$ est également convergente.

Exercice 2 : (sur 2 points)

Pour tout $n \geq 1$, posons $a_n = \left(1 + \sin \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On a $|\sin \frac{1}{n}| < 1$, donc $1 + \sin \frac{1}{n} > 0$ et a_n est bien définie.
$a_n = e^{-n^2 \ln(1 + \sin \frac{1}{n})} = e^{-n^2 \ln(1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-n^2(\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))} = e^{-n + o(n)}$,
donc $n^2 a_n = e^{2 \ln n - n + o(n)} = e^{-n + o(n)}$, or $-n + o(n) \sim -n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty$, donc par composition des limites, $n^2 a_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. Ceci prouve que $a_n = o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, or la série de Riemann $\displaystyle\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n^2}$ est convergente, donc $\sum a_n$ est également convergente.

Exercice 3 : (sur 3 points)

Pour $x \in \mathbb{R}$, lorsque c'est défini, posons $f(x) = \ln(3x^3 - 3\cos x + 4)$.
◇ Lorsque x est au voisinage de $+\infty$, $3x^3 - 3\cos x + 4 = 3x^3 + O(1) \sim 3x^3 > 0$, donc $f(x)$ est définie au voisinage de $+\infty$, et
$f(x) = \ln(3x^3) + \ln \dfrac{3x^3 - 3\cos x + 4}{3x^3} = \ln 3 + 3 \ln x + \ln(1 + o(1)) = 3 \ln x + O(1)$, ainsi $\boxed{f(x) \sim 3 \ln x}$.

$\diamond$ Lorsque x est au voisinage de 0,
$3x^3 - 3\cos x + 4 = o(x^2) - 3(1 - \dfrac{x^2}{2} + o(x^2)) + 4 = 1 + \dfrac{3}{2}x^2 + o(x^2) \sim 1 > 0$, donc $f(x)$ est définie au voisinage de 0 et $f(x) = \ln(1 + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)) \sim \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)$, car $\frac{3}{2}x^2 + o(x^2) \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$. Ainsi, $\boxed{f(x) \sim \frac{3}{2}x^2}$.

Exercice 4 :

$\diamond$ (sur 2 points) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, posons $f(x) = x\dfrac{1+x}{1+2x} = \dfrac{x+x^2}{1+2x}$.
f est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,
$f'(x) = \dfrac{(1+2x)(1+2x) - 2(x+x^2)}{(1+2x)^2} = \dfrac{1+2x+2x^2}{(1+2x)^2} > 0$,
donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Par récurence, on montre facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. En effet, $u_0 > 0$ et $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, donc si $u_n > 0$, alors $u_{n+1} = f(u_n) > 0$.
f étant croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, d'après le cours, la suite (u_n) est monotone.
Or pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $f(x) - x = \dfrac{(x+x^2) - x(1+2x)}{1+2x} = \dfrac{-x^2}{1+2x} \leq 0$, donc en particulier, $u_1 - u_0 = f(u_0) - u_0 \leq 0$. Ceci prouve que (u_n) est décroissante.
Étant de plus minorée par 0, (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}_+$ telle que $f(\ell) = \ell$ (car f est continue sur $\mathbb{R}_+$). Ainsi, $0 = f(\ell) - \ell = \dfrac{-\ell^2}{1+2\ell}$, donc $\ell = 0$.
On a donc montré que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } 0 \text{ en décroissant}}$.
$\diamond$ (sur 3 points) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha\Big(\Big(\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}\Big)^\alpha - 1\Big)$, or $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
donc $\dfrac{1+u_n}{1+2u_n} = (1+u_n)(1+2u_n)^{-1} = (1+u_n)(1-2u_n+o(u_n)) = 1 - u_n + o(u_n)$, puis $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha = u_n^\alpha(1 - \alpha u_n - 1 + o(u_n)) \sim -\alpha u_n^{\alpha+1}$ (c'est vrai même lorsque $\alpha = 0$).
En particulier, lorsque $\alpha = -1$, on obtient que $\dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n} \sim 1$.
Or la série $\sum 1$ diverge grossièrement et ses termes sont positifs, donc d'après le théorème de sommation, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\Big) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1$. Ainsi, $\dfrac{1}{u_n} - 1 \sim n$, or $\dfrac{1}{u_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$,
donc $\dfrac{1}{u_n} - 1 \sim \dfrac{1}{u_n}$. On en déduit que $\boxed{u_n \sim \frac{1}{n}}$.

Problème : Fonctions absolument monotones

Partie I : Généralités (sur 11,5 points)

1°) (sur $0,5$ point) Supposons que f est absolument monotone. Alors $f = f^{(0)} \geq 0$, $f' \geq 0$ et $f'' \geq 0$, donc d'après le cours, f est positive, croissante et convexe sur I.

2°) (sur 1 point) On suppose que f et g sont absolument monotones. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$, donc $f+g$ est absolument monotone.

De plus, d'après la formule de Leibniz, $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$, donc $(fg)^{(n)} \geq 0$, ce qui prouve que fg est absolument monotone.

3°) (sur 3 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
Pour toute application absolument monotone $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et pour toute application absolument monotone $g : J \longrightarrow I$, $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$.
$\diamond$ Supposons que $n = 0$. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow I$ deux applications absolument monotones. Alors, pour tout $x \in J$, $(f \circ g)^{(0)}(x) = f(g(x)) \geq 0$, donc $(f \circ g)^{(0)} \geq 0$.
$\diamond$ Supposons que $n \geq 0$ et que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $R(k)$ soit vraie.
Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow I$ deux applications absolument monotones.
$(f \circ g)' = g'.(f' \circ g)$, donc d'après la formule de Leibniz,
$(f \circ g)^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (f' \circ g)^{(k)} g^{(n-k+1)}$, or f' est une application absolument monotone de I dans $\mathbb{R}$, donc, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on peut appliquer $R(k)$ en remplaçant f par f'. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $(f' \circ g)^{(k)} \geq 0$. Alors, la formule précédente prouve que $(f \circ g)^{(n+1)} \geq 0$ ce qui prouve $R(n+1)$.
Ainsi, d'après le principe de récurrence forte, si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : J \longrightarrow I$ sont deux applications absolument monotones, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(f \circ g)^{(n)} \geq 0$, ce qui prouve que $f \circ g$ est absolument monotone.

Partie II : exemples (sur 7 points)

4°) (sur 2 points) Sur $I = [0, \frac{\pi}{2}[$, $\tan' = 1 + \tan^2$, donc pour tout $n \geq 1$, $\tan^{(n+1)} = (\tan')^{(n)} = (\tan^2)^{(n)}$, puis d'après la formule de Leibniz,
$\tan^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tan^{(k)} \tan^{(n-k)}$. Ainsi, si l'on note $R(n)$ l'assertion $\tan^{(n)} \geq 0$ sur I, on a clairement $R(0)$ et $R(1)$ car tan est positive sur I et car $\tan' = 1 + \tan^2$, puis pour tout $n \geq 1$, si l'on suppose que $R(k)$ est vraie pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, on montre $R(n+1)$. D'après le principe de récurrence forte, on en déduit que tan est absolument monotone sur I.

5°) (sur 2 points) On vérifie aisément par récurrence que,
pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, $\dfrac{d^n}{dx^n}\Big(\dfrac{1}{1+x}\Big) = \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}$ et $\dfrac{d^n}{dx^n}\Big(\dfrac{1}{1-x}\Big) = \dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}}$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in]0,1[$, $g^{(n)}(x) = \dfrac{1}{2}\Big(\dfrac{n!}{(1-x)^{n+1}} - \dfrac{(-1)^n n!}{(1+x)^{n+1}}\Big)$.
Si n est impair, alors $g^{(n)}(x) = \dfrac{n!}{2}\Big(\dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} + \dfrac{1}{(1+x)^{n+1}}\Big) \geq 0$.
Supposons maintenant que n est pair et fixons $x \in]0,1[$. Alors
$g^{(n)}(x) \geq 0 \iff \dfrac{1}{(1-x)^{n+1}} \geq \dfrac{1}{(1+x)^{n+1}} \iff (1-x)^{n+1} \leq (1+x)^{n+1}$, or cette dernière inégalité est vraie car $0 < 1-x \leq 1+x$, donc $g^{(n)} \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui prouve que g est absolument monotone.

6°) (sur 3 points)
D'après le cours, l'application arcsin est définie et de classe C^∞ sur $]0,1[$.
Soit $x \in]0,1[$. On sait que $\arcsin(x) \geq 0$ et que $\arcsin'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.
Ainsi, si l'on pose $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, il suffit de montrer que f est absolument monotone. Or $f'(x) = \dfrac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$, mais par réduction au même dénominateur, $g(x) = \dfrac{x}{1-x^2}$, donc $f' = gf$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n+1)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$.
Or g est absolument monotone, donc cette formule permet de montrer par récurrence forte que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)} \geq 0$, ce qui conclut.

Partie III : Fonctions totalement monotones (sur 7,5 points)

7°) (sur 1 point) Fixons $h \in \mathbb{R}$. Soit $f, g \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$\tau_h(\alpha f + g)(x) = (\alpha f + g)(x+h) = \alpha f(x+h) + g(x+h) = \alpha\tau_h(f)(x) + \tau_h(g)(x)$, donc
$\tau_h(\alpha f + g)(x) = (\alpha\tau_h(f) + \tau_h(g))(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.
On en déduit que $\tau_h(\alpha f + g) = \alpha\tau_h(f) + \tau_h(g))$, donc $\tau_h \in L(E)$.
De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, pour tout $f \in E$,
$(\tau_h \circ \tau_{-h})(f)(x) = \tau_h(\tau_{-h}(f))(x) = \tau_{-h}(f)(x+h) = f((x+h)-h) = f(x)$, donc $\tau_h \circ \tau_{-h} = Id_E$. En remplaçant h par $-h$, on en déduit également que $\tau_{-h} \circ \tau_h = Id_E$, donc τ_h est une bijection, donc la bijection réciproque est τ_{-h}.
Ainsi, pour tout $h \in \mathbb{R}$, τ_h est un automorphisme de l'espace vectoriel E.

8°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$, $h \in \mathbb{R}$, $f \in E$ et $x \in \mathbb{R}$.
Dans l'algèbre $L(E)$, τ_h et $-Id_E$ commutent, donc on peut appliquer la formule du binôme de Newton. Ainsi, $\Delta_h^n = (\tau_h - Id_E)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \tau_h^k (-Id_E)^{n-k}$, puis

$\Delta_h^n(f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \tau_h^k(f)$ et enfin, $\Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh)$.

9°) (sur 1,5 points) Soit $h \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$.

D'après la question précédente, $\Delta_h^{n+1}(f)(x) = \sum_{k=0}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} f(x+kh)$,

donc $h \longmapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ est dérivable et

$\frac{d}{dh}(\Delta_h^{n+1}(f)(x)) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n+1}{k} kf'(x+kh)$, or d'après la formule comité-président, pour tout $k \in \mathbb{N}_{n+1}$, $k \binom{n+1}{k} = (n+1) \binom{n}{k-1}$, donc

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dh}(\Delta_h^{n+1}(f)(x)) &= (n+1) \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{n+1-k} \binom{n}{k-1} f'(x+kh) \\
&= (n+1) \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f'(x+h+kh) \\
&= (n+1)\Delta_h^n(f')(x+h), \text{toujours d'après la question précédente.}
\end{aligned}$$

10°) (sur 3 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : pour toute application $f \in E$ qui est absolument monotone, pour tout $h > 0$, $\Delta_h^n(f) \geq 0$.
Pour $n = 0$: Soit $f \in E$ une application absolument monotone et soit $h > 0$.
Alors $\Delta_h^0(f) = f \geq 0$, donc $R(0)$ est vraie.
Pour $n \in \mathbb{N}$, supposons $R(n)$. Soit $f \in E$ une application absolument monotone.
Soit $x \in \mathbb{R}$. f' est aussi absolument monotone, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à f' : pour tout $h \in \mathbb{R}_+^*$, $(n+1)\Delta_h^n(f')(x+h) \geq 0$. Ainsi, d'après la question précédente, l'application $h \longmapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.
Soit $h \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $k \in]0, h[$, $\Delta_k^{n+1}(f)(x) \leq \Delta_h^{n+1}(f)(x)$, or d'après la question 8, $h \longmapsto \Delta_h^{n+1}(f)(x)$ est continue sur $\mathbb{R}$, donc en faisant tendre k vers 0 dans l'inégalité précédente, on en déduit que $\Delta_0^{n+1}(f)(x) \leq \Delta_h^{n+1}(f)(x)$, mais
$\Delta_0 = \tau_0 - Id_E = Id_E - Id_E = 0$, donc $\Delta_0^{n+1} = 0$. Ainsi, on a montré que $\Delta_h^{n+1}(f)(x) \geq 0$, pour tout $h > 0$ et pour tout $f \in E$ absolument monotone. Ceci prouve $R(n+1)$ et le principe de récurrence permet de conclure.

Partie IV : totalement monotone $\Longleftrightarrow$ absolument monotone (sur 18 points)

11°) (sur 2 points)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^∞. Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Il s'agit de montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R(n)$: $f(b) = \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(a)}{j!}(b-a)^j + \int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\, dt$.
On démontre cette propriété par récurrence sur n.

Pour $n=0$, $\displaystyle\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt = \int_a^b f'(t)\ dt = f(b)-f(a)$, d'où $R(0)$.
Pour $n \in \mathbb{N}$, on suppose $R(n)$. Or en intégrant par parties,

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{(b-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt &= \Big[-\frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(t)\Big]_a^b + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt \\ &= \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(a) + \int_a^b \frac{(b-t)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+2)}(t)\ dt.\end{aligned}$$

Alors, de $R(n)$, on en déduit bien $R(n+1)$.

12°) (sur 3 points) Soit $t \in \mathbb{R}$. Posons $f(t) = (e^t-1)^n$.
D'après la formule du binôme de Newton, $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} e^{kt}(-1)^{n-k}$, donc pour tout $j \in \mathbb{N}$, $f^{(j)}(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^j e^{kt}(-1)^{n-k}$, puis $f^{(j)}(0) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^j(-1)^{n-k}$.
Or d'après la formule de Taylor-Young, f étant de classe C^∞,
au voisinage de 0, $f(t) = \displaystyle\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} t^j + o(t^n)$.
D'autre part, au voisinage de 0, on sait que $e^t - 1 \sim t$, donc $f(t) \sim t^n$, ce qui signifie que $f(t) = t^n + o(t^n)$. Alors, d'après l'unicité du développement limité, on a bien que, pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \frac{k^j}{j!} = \begin{cases} 0 \text{ si } j < n \\ 1 \text{ si } j = n \end{cases}$.

13°) (sur 5 points)
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $h > 0$, d'après Taylor avec reste intégral,

$$\begin{aligned} 0 &\le \Delta_h^n(f)(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+kh) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} \Big(\sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} (kh)^j + \int_x^{x+kh} \frac{(x+kh-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \Big),\end{aligned}$$

donc en intervertissant les deux sommes, puis en utilisant la question précédente,

$$\begin{aligned} 0 &\le \sum_{j=0}^{n} \frac{f^{(j)}(x)}{j!} h^j \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^j + \sum_{k=0}^{n} \int_x^{x+kh} \frac{(x+kh-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt \\ &= f^{(n)}(x) h^n + h^n R(h), \text{ où } R(h) = \sum_{k=0}^{n} \int_x^{x+kh} \frac{(\frac{x-t}{h}+k)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ dt.\end{aligned}$$

En divisant par h^n, ce qui est possible car $h > 0$, on obtient que $f^{(n)}(x) + R(h) \ge 0$. On va maintenant montrer que $R(h) \underset{\substack{h \to 0 \\ h > 0}}{\longrightarrow} 0$, ce qui permettra d'affirmer en faisant tendre h vers 0 dans l'inégalité précédente que $f^{(n)}(x) \ge 0$, ce qui conclut.
$f^{(n+1)}$ est continue sur le compact $[x, x+n]$, donc elle est bornée sur cet intervalle. Ainsi, il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $u \in [x, x+n]$, $|f^{(n+1)}(u)| \le M$.
Soit alors $h \in]0,1]$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $[x, x+kh] \subset [x, x+n]$, donc par inégalité

triangulaire, $|R(h)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_x^{x+kh} \frac{|\frac{x-t}{h}+k|^n}{n!} M\ dt$.
Pour tout $k \in \{0,\ldots,n\}$, pour tout $t \in [x, x+kh]$, $|x-t| \leq |kh|$, donc
$|\frac{x-t}{h}+k| \leq \frac{|x-t|}{h}+k \leq 2k$. Ainsi,
$|R(h)| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \int_x^{x+kh} \frac{(2k)^n}{n!} M\ dt = \sum_{k=0}^{n} kh \frac{(2k)^n}{n!} M = hC$, où C est indépendant de h.
Ainsi, $hC \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} 0$, puis d'après le principe des gendarmes, $R(h) \underset{\substack{h\to 0\\ h>0}}{\longrightarrow} 0$.

14°) (sur 5 points)
$\diamond$ Pour tout $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \Delta_h^2(f)(x) = f(x+2h) - 2f(x+h) + f(x)$, donc $f(x+h) \leq \frac{1}{2}(f(x) + f(x+2h))$.
Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Si $a < b$, posons $h = \dfrac{b-a}{2}$. Alors $f(a+h) = f(\frac{1}{2}(a+b))$ et
$f(a+2h) = f(b)$, donc $(1)\ :\ f(\frac{1}{2}(a+b)) \leq \frac{1}{2}(f(a)+f(b))$.
Si $a > b$, on applique ce qui précède en remplaçant (a,b) par (b,a). On retrouve (1).
Si $a = b$, (1) est évidente, donc (1) est vraie pour tout $a, b \in \mathbb{R}$.
$\diamond$ Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrons par récurrence sur n l'assertion $R(n)$ suivante :
pour tout $k \in \{0,\ldots,2^n\}$, $f(x + \dfrac{k}{2^n}(y-x)) \leq f(x) + \dfrac{k}{2^n}(f(y)-f(x))$.
Pour $n = 0$, c'est évident.
Pour $n \geq 0$, supposons $R(n)$.
Soit $k \in \{0,\ldots,2^{n+1}\}$.
Si k est pair, $k = 2h$, donc d'après $R(n)$,

$$\begin{aligned}
f(x+\frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &= f(x+\frac{h}{2^n}(y-x)) \leq f(x) + \frac{h}{2^n}(f(y)-f(x)) \\
&= f(x) + \frac{k}{2^{n+1}}(f(y)-f(x)).
\end{aligned}$$

Si k est impair, $k = 2h+1$, donc

$$\begin{aligned}
f(x+\frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &= f(x+\frac{h}{2^n}(y-x) + \frac{1}{2^{n+1}}(y-x)) \\
&= f\Big(\frac{1}{2}[(x+\frac{h}{2^n}(y-x)) + (x+\frac{h+1}{2^n}(y-x))]\Big),
\end{aligned}$$

donc d'après l'énoncé, puis en utilisant $R(n)$,

$$\begin{aligned}
f(x+\frac{k}{2^{n+1}}(y-x)) &\leq \frac{1}{2}[f(x+\frac{h}{2^n}(y-x)) + f(x+\frac{h+1}{2^n}(y-x))] \\
&\leq \frac{1}{2}[(f(x)+\frac{h}{2^n}(f(y)-f(x))) + (f(x)+\frac{h+1}{2^n}(f(y)-f(x)))] \\
&= f(x) + \frac{2h+1}{2^{n+1}}(f(y)-f(x)),
\end{aligned}$$

ce qui prouve $R(n+1)$.
$\diamond$ Soit $\alpha \in [0,1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons k_n la partie entière de $2^n\alpha$.
Ainsi, $k_n \in \{0,\ldots,2^n\}$. De plus, $2^n\alpha - 1 \leq k_n \leq 2^n\alpha$, donc d'après le principe des gendarmes, $\dfrac{k_n}{2^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x + \frac{k_n}{2^n}(y-x)) \leq f(x) + \frac{k_n}{2^n}(f(y) - f(x))$ et f est continue, donc en faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient : $f(x + \alpha(y-x)) \leq f(x) + \alpha(f(y) - f(x))$. Ceci montre que f est convexe.

15°) (sur 3 points)
D'après la question précédente, il suffit de montrer que f est continue.
◇ Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $h > 0$, $0 \leq \Delta_h(f)(x) = f(x+h) - f(x)$, donc f est croissante. D'après le théorème de la limite monotone, elle possède en tout $x \in \mathbb{R}$ une limite à droite, notée $f(x)^+$ et une limite à gauche notée $f(x)^-$, avec $f(x)^- \leq f(x) \leq f(x)^+$.
◇ Pour tout $h > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $0 \leq \Delta_h^2(f)(x)$, donc d'après le début de la question précédente, qui n'utilise pas l'hypothèse de continuité,
pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $f(\frac{1}{2}(a+b)) \leq \frac{1}{2}(f(a) + f(b))$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que, pour tout $h > 0$, $f(x+h) \leq \frac{1}{2}(f(x-h) + f(x+3h))$, donc en faisant tendre h vers 0^+, $f(x)^+ \leq \frac{1}{2}(f(x)^- + f(x)^+)$, donc $f(x)^+ \leq f(x)^-$. Ainsi, $f(x)^+ = f(x) = f(x)^-$, ce qui prouve que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Partie V : Développement en série entière (sur 10 points)

16°) (sur 2 points) ◇ On ne peut en général pas prolonger f en b en une application monotone, car la fonction tan est absolument monotone sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ d'après la question 4, mais elle n'est pas prolongeable par continuité en $\frac{\pi}{2}$, car $\tan(t) \underset{t \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} +\infty$.
◇ f est croissante, donc d'après le théorème de la limite monotone,
$f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \inf_{x \in]a,b[} f(x)$. Or f est positive, donc $\{f(x) \ / \ x \in]a,b[\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Ainsi, il existe $\ell \in \mathbb{R}_+$ tel que $f(t) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell$. Alors, en posant $f(a) = \ell$, on prolonge f en une application continue et positive sur $[a, b[$.
◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'application $f^{(n)}$ est croissante et positive, donc le même raisonnement que précédemment prouve qu'il existe $\ell_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f^{(n)}(x) \underset{t \to a}{\longrightarrow} \ell_n$. Or f est continue sur $[a, b[$ et C^∞ sur $]a, b[$, donc d'après le théorème de la limite de la dérivée, f est C^∞ sur $[a, b[$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(a) = \ell_n \geq 0$, ce qui prouve que f est absolument monotone sur $[a, b[$.

17°) (sur 2 points)
Soit $t \in [0, b[$. Avec les notations de l'énoncé, la formule de Taylor avec reste intégral s'écrit : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k + \rho_n(t)$, or f est absolument monotone, donc $\rho_n(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^n}{n!} f^{(n+1)}(x) \, dx \geq 0$, donc $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k \leq f(t)$. Ainsi, la suite des sommes partielles de la série $\sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!} t^n$ est majorée, or cette série est à termes positifs, donc d'après le cours, elle est convergente.

18°) (sur 1,5 points)
Soit $n \in \mathbb{N}$. $\dfrac{\rho_n(t)}{t^n} = \displaystyle\int_0^t \frac{(1-\frac{x}{t})^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$, or pour tout $x \in [0,t]$, $\dfrac{x}{t} \geq \dfrac{x}{t'}$, donc $0 \leq 1-\dfrac{x}{t} \leq 1-\dfrac{x}{t'}$. Ainsi, $\dfrac{\rho_n(t)}{t^n} \leq \displaystyle\int_0^t \frac{(1-\frac{x}{t'})^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx \leq \int_0^{t'} \frac{(1-\frac{x}{t'})^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$, car la fonction intégrée est positive. Ceci conclut.

19°) (sur 2 points) Soit $t \in [0,b[$. Il suffit de montrer que $f(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$. C'est évident lorsque $t = 0$, donc on peut supposer que $0 < t < b$.
Alors il existe $t' \in \mathbb{R}$ tel que $0 < t < t' < b$. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \rho_n(t) \leq \left(\dfrac{t}{t'}\right)^n \rho_n(t')$, or $\rho_n(t') = f(t') - \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t'^k \leq f(t')$, car f est absolument monotone, donc $0 \leq \rho_n(t) \leq \left(\dfrac{t}{t'}\right)^n f(t') \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\frac{t}{t'} \in [0,1[$. On en déduit alors que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k = f(t) - \rho_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} f(t)$, ce qu'il fallait démontrer.

20°) (sur 2,5 points) Toujours d'après la formule de Taylor avec reste intégral, il suffit de montrer que, pour tout $t \in]-b,b[$, $\rho_n(t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. C'est déjà fait lorsque $t \in [0,b[$.
Supposons maintenant que $-b < t < 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$. Par inégalité triangulaire,
$|\rho_n(t)| \leq \displaystyle\int_t^0 \frac{|t-x|^n}{n!} f^{(n+1)}(x)\,dx$, car $f^{(n+1)}(x) \geq 0$. On pose $u = -x$:
$|\rho_n(t)| \leq \displaystyle\int_0^{-t} \frac{|u-(-t)|^n}{n!} f^{(n+1)}(-u)\,du$. Or $f^{(n+1)}$ est croissante,
donc pour tout $u \in [0,-t]$, $f^{(n+1)}(-u) \leq f^{(n+1)}(u)$. Ainsi,
$|\rho_n(t)| \leq \displaystyle\int_0^{-t} \frac{|u-(-t)|^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,du = \int_0^{-t} \frac{((-t)-u)^n}{n!} f^{(n+1)}(u)\,du = \rho_n(-t) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$
d'après la question précédente. Ceci conclut cette question.