Feuille d'exercices 20.
Corrigé de 4 exercices

Exercice 20.20 :

$\diamond$ *Première méthode :*

Posons $P(X) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k X^k$, où la suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite presque nulle de rationnels.

D'après la formule du binôme, on a $0 = P(a+\sqrt{b}) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \sum_{h=0}^{k} \binom{k}{h} a^{k-h}(\sqrt{b})^h$, donc

$0 = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2h} a^{k-2h} b^h + \sqrt{b} \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k}{2h+1} a^{k-2h-1} b^h.$

Posons $A = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{k}{2} \rfloor} \binom{k}{2h} a^{k-2h} b^h$ et $B = \sum_{k\in\mathbb{N}} \alpha_k \sum_{h=0}^{\lfloor \frac{k-1}{2} \rfloor} \binom{k}{2h+1} a^{k-2h-1} b^h$.

D'après les hypothèses, A et B sont deux rationnels. De plus $A + \sqrt{b}B = 0$.
Si $B \neq 0$, alors $\sqrt{b} = -\frac{A}{B} \in \mathbb{Q}$, ce qui est faux, donc $B = 0$, puis $A = 0$. Or, par un calcul similaire, on montre que $P(a-\sqrt{b}) = A - \sqrt{b}B$, donc $P(a-\sqrt{b}) = 0$.

$\diamond$ *Simplication de la méthode précédente :*

On pose $Q(X) = P(X+a) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_n X^n$. $Q(X) \in \mathbb{Q}[X]$ car $a \in \mathbb{Q}$.

On a $0 = Q(\sqrt{b}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n} b^n + \sqrt{b} \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n+1} b^n = A + \sqrt{b}B$,

en posant $A = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n} b^n \in \mathbb{Q}$ et $B = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_{2n+1} b^n \in \mathbb{Q}$.

Comme précédemment, on en déduit que $A = B = 0$,
donc $P(a-\sqrt{b}) = Q(-\sqrt{b}) = A - \sqrt{b}B = 0$.

$\diamond$ *Autre méthode, plus théorique :*

On pose $A = \mathbb{Q}[\sqrt{b}] = \{\alpha + \beta\sqrt{b} \ / \ \alpha, \beta \in \mathbb{Q}\}$. On vérifie que A est une $\mathbb{Q}$-sous algèbre de $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que, $1 \in A$, et pour tout $x, y \in A$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $x + y \in A$, $\alpha x \in A$ et $xy \in A$ (en fait A est même un sous-corps de $\mathbb{R}$ mais c'est ici inutile).
Pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, on note $\varphi(\alpha + \beta\sqrt{b}) = \alpha - \beta\sqrt{b}$.
On vérifie que φ est un endomorphisme de $\mathbb{Q}$-algèbre, c'est-à-dire que, $\varphi(1) = 1$ et que pour tout $x, y \in A$, pour tout $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\varphi(\alpha x + y) = \alpha\varphi(x) + \varphi(y)$ et $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Soit $P(X)=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k X^k\in\mathbb{Q}[X]$ tel que $P(a+\sqrt{b})=0$.
Alors $0=\varphi(0)=\varphi(P(a+\sqrt{b}))=\varphi\Big(\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k(a+\sqrt{b})^k\Big)$,
donc $0=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k(\varphi(a+\sqrt{b}))^k=\sum_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k(a-\sqrt{b})^k=P(a-\sqrt{b})$.

Exercice 20.21 :

Supposons que $(X-1)^4|(P+1)$ et $(X+1)^4|(P-1)$: 1 et -1 sont racines de multiplicités au moins 4 de $P+1$ et $P-1$ respectivement, donc 1 et -1 sont racines de multiplicités au moins 3 des dérivées de $P+1$ et $P-1$, à savoir P'. Ainsi, il existe $C\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P'(t)=C(t)(1-t)^3(1+t)^3=(P-1)'$. Or $(P-1)(-1)=0$,
donc $P(x)-1=\int_{-1}^{x}C(t)(1-t^2)^3dt$.
La réciproque étant claire, P est tel que $(X-1)^4|(P+1)$ et $(X+1)^4|(P-1)$ si et seulement si il existe $C\in\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x)=1+\int_{-1}^{x}C(t)(1-t^2)^3dt$
et $0=P(1)+1=2+\int_{-1}^{1}C(t)(1-t^2)^3dt$.
On a $deg(P)=deg(C)+7$, donc P est minimal lorsque C est minimal. La solution consiste donc à prendre C constant tel que $C\int_{-1}^{1}(1-t^2)^3dt=-2$.
On calcule $\int_0^1(1-t^2)^3dt=\int_0^1(1-3t^2+3t^4-t^6)dt=1-\frac{3}{3}+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}=\frac{21-5}{35}=\frac{16}{35}$,
donc $C=-\frac{35}{16}$ puis $P=1-\frac{35}{16}\int_{-1}^{x}(1-3t^2+3t^4-t^6)dt$.
$P=1-\frac{35}{16}\Big[t-t^3+\frac{3}{5}t^5-\frac{1}{7}t^7\Big]_{-1}^{x}=1-\frac{35}{16}\Big(x-x^3+\frac{3}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\frac{3}{5}-\frac{1}{7}\Big)$.
Finalement, $P=\frac{35}{16}\Big(\frac{x^7}{7}-\frac{3}{5}x^5+x^3-x\Big)$.

Exercice 20.25 :

[Lorsque les racines des polynômes sont simples à déterminer, un bon critère pour décider si le polynôme P divise le polynôme Q, lorsqu'ils sont scindés, est de montrer que les racines de P sont des racines de Q avec une multiplicité supérieure.
Dans le cas présent, il faut rechercher les éventuelles racines communes de X^p-1 et de X^q-1, pour déterminer les multiplicités des racines de $(X^p-1)(X^q-1)$.]

$\diamond$ Soient $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ une racine $p^{\text{ème}}$ de l'unité et $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ une racine $q^{\text{ème}}$ de l'unité, avec $k\in\{0,\dots,p-1\}$ et $h\in\{0,\dots,q-1\}$. Si elles sont égales, comme $\frac{2k\pi}{p}$ est $\frac{2h\pi}{q}$ sont dans $[0,2\pi[$, $\frac{2k\pi}{p}=\frac{2h\pi}{q}$, donc $\frac{k}{p}=\frac{h}{q}$, puis $qk=ph$. Alors $q\mid hp$, or $q\wedge p=1$, donc d'après le théorème de Gauss, $q|h$. Dans ce cas ces racines de l'unité sont égales à 1. Ainsi, à part 1, les racines $p^{\text{èmes}}$ de l'unité sont distinctes des racines $q^{\text{èmes}}$ de l'unité.

$\diamond$ Le polynôme $(X^p-1)(X^q-1)$ admet donc 1 comme racine double, et comme racines simples les $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ pour $k \in \{1,\dots,p-1\}$ et les $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ pour $k \in \{1,\dots,q-1\}$.
On vérifie que $(X-1)(X^{pq}-1)$ admet 1 comme racine double et que les $e^{\frac{2ik\pi}{p}}$ et les $e^{\frac{2ih\pi}{q}}$ sont racines de ce polynôme. Ainsi, $(X-1)(X^{pq}-1)$ est divisible par $(X^p-1)(X^q-1)$.

Exercice 20.27 :

$\diamond$ *Unicité :* Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(nt) = P(\text{ch}t) = Q(\text{ch}t)$. Alors, pour tout $x \in [1,+\infty[$, $(P-Q)(x) = (P-Q)(\text{ch}(\text{argch}x)) = 0$, donc $P-Q$ possède une infinité de racines. On en déduit que $P = Q$, ce qui prouve l'unicité.
$\diamond$ *Existence.* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, notons $R(n)$ l'assertion : il existe $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\text{ch}(nt) = P_n(\text{ch}t)$ et tel que $\deg(P_n) = n$.
Pour $n = 0$ et $n = 1$, $R(n)$ est vrai en convenant que $P_0 = 1$ et $P_1 = X$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, supposons $R(n)$ et $R(n-1)$. Soit $t \in \mathbb{R}$.
$\text{ch}(n+1)t + \text{ch}(n-1)t = \text{ch}(nt)\text{ch}t + \text{sh}(nt)\text{sh}t + \text{ch}(nt)\text{ch}t - \text{sh}(nt)\text{sh}t = 2\text{ch}(nt)\text{ch}t$, donc d'après l'hypothèse de récurrence, $\text{ch}(n+1)t = 2P_n(\text{ch}t)\text{ch}t - P_{n-1}(\text{ch}t)$. Ainsi, $\text{ch}(n+1)t = P_{n+1}(\text{ch}t)$, en convenant que $P_{n+1} = 2XP_n - P_{n-1}$.
De plus, par hypothèse de récurrence, $\deg(XP_n) = n+1$ et $\deg(P_{n-1}) = n-1 \neq n+1$, donc d'après le cours, $\deg(P_{n+1}) = \max(n+1, n-1) = n+1$.
$\diamond$ De même, $\cos(n+1)t + \cos(n-1)t = 2\cos t \cos(nt)$, donc en adaptant la démonstration précédente, on obtient que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$, $\cos(nt) = P_n(\cos t)$. Cela signifie que les P_n sont les polynômes de Tchebychev de première espèce.
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $P_n(\cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n})) = \cos(\frac{\pi}{2} + k\pi) = 0$, or pour $k \in \{0,\dots,n-1\}$, $0 < \frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n} < \frac{\pi}{n} + (n-1)\frac{\pi}{n} = \pi$, et l'application cos est strictement décroissante donc injective sur l'intervalle $[0,\pi]$, donc la suite $(\cos(\frac{\pi}{2n} + k\frac{\pi}{n}))_{0 \le k \le n-1}$ constitue une famille de n racines deux à deux distinctes de P_n. Or $\deg(P_n) = n$, donc on dispose ainsi de toutes les racines de P_n.