DM 32

Les polynômes de Bernoulli

1°) En procédant par analyse-synthèse, montrer qu'il existe une unique suite de polynômes $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{R}[X]$ telle que :

1. pour tout $n \in \mathbb{N}$, B_n est de degré n ;
2. $B_0 = 1$;
3. $\forall n \geq 1,\ \ B_n' = nB_{n-1}$;
4. $\forall n \geq 1,\ \ \displaystyle\int_0^1 B_n(x)\ dx = 0.$

Il s'agit de la suite des polynômes de Bernoulli.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B_n(1 - X) = (-1)^n B_n(X)$.
Qu'en déduit-on au sujet du graphe de B_n ?

3°) À l'aide de la formule de Taylor, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $B_n(x + y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k}$.

Pour toute la suite du problème, on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = B_n(0)$.

4°) Pour $n \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$, calculer B_n et b_n.

5°) Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

6°) On pose $Q_0 = B_0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $Q_n = B_n(X) - nb_1X^{n-1}$.
Exprimer $Q_n(-X)$ en fonction de $Q_n(X)$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(-X) = (-1)^n(B_n(X) + nX^{n-1})$.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $B_n(X + 1) - B_n(X) = nX^{n-1}$.

7°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(X) = (n + 1)X^n$.

Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = 0$.

8°) Soit $K, N \in \mathbb{N}$.

Donner une expression simple de $\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^N$ en fonction de K, N et de B_{N+1}.
Vérifier cette formule lorsque $N = 2$.

Soit g est une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On note (E_g) l'équation $\forall x \in \mathbb{R},\ \ f(x+1) - f(x) = g(x)$, dont l'inconnue f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

9°) Montrer que (E_g) est une équation linéaire.

On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des applications 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

10°) Pour cette seule question, on suppose que g est une application polynomiale, de la forme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} a_n X^n$. Déterminer les solutions de (E_g), en fonction de $\mathcal{P}$, des coefficients a_n et de la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

11°) Montrer que (E_g) possède au moins une solution f telle que $f(x)$ tend vers une limite réelle lorsque x tend vers $+\infty$ si et seulement si pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_n g(x+n)$ converge et si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

12°) Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
Déterminer les solutions de (E_g) lorsque, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) = e^{-\lambda x}$.

13°) Montrer que la série $\displaystyle\sum_n g(x+n)$ peut être convergente pour tout $x \in \mathbb{R}$, sans que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.