Résumé de cours :
Semaine 27, les 29 et 30 avril.

Les matrices

1 Vocabulaire

Définition. Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^{*2}$. On appelle ***matrice*** à n lignes et à p colonnes (à coefficients dans $\mathbb{K}$) toute famille de scalaires indexée par $\mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p$.
Si $M = (m_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p} = (m_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$, on représente M sous la forme suivante :

$$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,p} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,p} \end{pmatrix},$$

où le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient est situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et de la $j^{\text{ème}}$ colonne.

Notation. L'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à n lignes et p colonnes est noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ ou $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,n)$ est souvent noté $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ ou $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définitions :
- Une ***matrice ligne*** est une matrice ne possédant qu'une ligne.
- Une ***matrice colonne*** est une matrice ne possédant qu'une colonne.
- Une ***matrice carrée*** est une matrice possédant autant de lignes que de colonnes.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice triangulaire supérieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i > j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- M est une ***matrice triangulaire inférieure*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \ \big(i < j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$.
- $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ est une ***matrice diagonale*** si et seulement si $\forall (i,j) \in \mathbb{N}_n \times \mathbb{N}_p \quad \big(i \neq j \Longrightarrow m_{i,j} = 0\big)$. On note alors $M = diag(m_{1,1}, \dots, m_{n,n})$.
- Une matrice carrée et diagonale est dite ***scalaire*** lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux. En particulier, lorsque tous ses coefficients diagonaux sont égaux à 1, on obtient la matrice identité, notée I_n.

Remarque. On identifiera $\mathbb{K}^n$ avec $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,1)$ (ensemble des matrices colonnes).

2 Opérations sur les matrices

Définition. On sait dèjà que $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}_n\times\mathbb{N}_p}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . On dispose ainsi des lois d'addition et de multiplication par un scalaire.

Propriété. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$. La base canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est la famille de matrices $(E_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\1\le j\le p}}$ définie par : Pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$ et $j \in \{1,\dots,p\}$, $E_{i,j} = (\delta_{a,i}\delta_{b,j})_{\substack{1\le a\le n\\1\le b\le p}}$.

$E_{i,j}$ est appelée la (i,j)-ième matrice élémentaire de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Tous ses coefficients sont nuls, sauf celui de position (i,j) qui est égal à 1.
Ainsi, pour tout $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $M = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}} M_{i,j} E_{i,j}$.
On en déduit que $\dim(\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})) = np$.

Convention : Lorsque A est une matrice, on notera $A_{i,j}$ son coefficient de position (i,j).

Définition du produit matriciel : Soit $(n,p,q) \in (\mathbb{N}^*)^3$. Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{p})$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p},q)$.
On appelle ***produit des matrices*** A et B la matrice $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,q)$ définie par

$$\boxed{[AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} A_{i,k} B_{k,j}}.$$

Formule pour le produit de trois matrices : Soit $(n,m,l,p) \in (\mathbb{N}^*)^4$.
Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{m})$, $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{m},\mathbf{l})$ et $C \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{l},p)$: $[(AB)C]_{i,h} = [A(BC)]_{i,h} = \sum_{\substack{1 \leq j \leq m \\ 1 \leq k \leq l}} A_{i,j} B_{j,k} C_{k,h}$.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. La multiplication matricielle est associative.

Propriété. La mutiplication matricielle est distributive par rapport à l'addition.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors $a(AB) = (aA)B = A(aB)$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $I_n M = M I_p = M$.

Propriété. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$. Pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX \in \mathbb{K}^n$.
Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$, alors $\forall i \in \{1,\ldots,n\}$, $[MX]_i = \sum_{j=1}^{p} M_{i,j} x_j$
et $MX = x_1 M_1 + \cdots x_p M_p$, en notant $M_1, \ldots, M_p$ les colonnes de M.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, la j-ème colonne de M est Mc_j, où $c_j = (\delta_{i,j})_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{K}^p$.

Définition. Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, $\begin{array}{rccc} \tilde{M}: & \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & X & \longmapsto & MX \end{array}$ est une application linéaire que l'on appelle **l'application linéaire canoniquement associée à la matrice** M.

Propriété. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. On identifie souvent M et $\tilde{M}$, auquel cas, pour tout $X \in \mathbb{K}^p$, $MX = M(X)$.
Cela permet d'interpréter une matrice M comme une application linéaire.

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\mathrm{Ker}(M) \stackrel{\Delta}{=} \{X \in \mathbb{K}^p \ / \ MX = 0\}$

et $\mathrm{Im}(M) \stackrel{\Delta}{=} \{MX \ / \ X \in \mathbb{K}^p\} = \mathrm{Vect}\{\text{colonnes de } M\}$.

Corollaire. Soit $(M, M') \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$: $\big(\forall X \in \mathbb{K}^p \quad MX = M'X\big) \Longleftrightarrow M = M'$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Alors $\widetilde{AB} = \tilde{A} \circ \tilde{B}$.

3 L'algèbre des matrices carrées de taille $n \in \mathbb{N}^*$

Propriété. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, ., \times)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre, ni commutative ni intègre dès que $n \geq 2$.

Définition. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est nilpotente si et seulement si il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $A^p = 0$.

Propriété. $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n) & \longrightarrow & L(\mathbb{K}^n) \\ M & \longmapsto & \tilde{M} \end{array}$ est un isomorphisme d'algèbres.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :
- A est inversible dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$.
- $\tilde{A}$ est inversible dans $L(\mathbb{K}^n)$ (auquel cas, $\widetilde{A^{-1}} = \tilde{A}^{-1}$).
- Pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, il existe un unique $Y \in \mathbb{K}^n$ tel que $AX = Y$.
- A est inversible à droite.
- A est inversible à gauche.
- $\text{Ker}(A) = \{0\}$, i.e pour tout $X \in \mathbb{K}^n$, $AX = 0 \Longrightarrow X = 0$.
- $\tilde{A}$ est surjective, i.e $\text{Im}(A) = \mathbb{K}^n$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule : Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$, $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $\det(M) \stackrel{\Delta}{=} ad - cb \neq 0$, et dans ce cas $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule de Cramer : Soit $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{K}^4$. Lorsque $\det = ad - cb \stackrel{\Delta}{=} \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$,

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f \end{cases} \Longleftrightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}}{\det} \ \wedge \ y = \frac{\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix}}{\det}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Notation. $GL_n(\mathbb{K})$ = groupe des inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On l'appelle le groupe linéaire de degré n.

Exemple. Un automorphisme intérieur de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est un automorphisme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ de la forme $M \longmapsto AMA^{-1}$ où $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Les matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ forment une sous-algèbre commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, on pose $c_i = (\delta_{i,j})_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{K}^n$ et $F_i = \text{Vect}(c_k)_{1 \leq k \leq i}$.
Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, M est triangulaire supérieure ssi, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, F_j est stable par $\tilde{M}$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. On suppose que $n \geq 2$.
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement : inférieures) de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une sous-algèbre non commutative de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
- Le produit d'une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1, \ldots, a_n)$ par une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(b_1, \ldots, b_n)$ est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n)$.
- Une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(a_1, \ldots, a_n)$ est inversible si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i \neq 0$ et dans ce cas, son inverse est une matrice triangulaire supérieure dont la diagonale est $(\frac{1}{a_1}, \ldots, \frac{1}{a_n})$

Il faut savoir le démontrer.

4 Transposée d'une matrice

Définition. Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$. On appelle ***transposée de la matrice*** A et on note ${}^tA$ la matrice de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,n)$ définie par $[{}^tA]_{i,j} = A_{j,i}$.

Propriété. Pour tout $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$, ${}^t({}^tA) = A$.

Propriété. L'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,n) \\ M & \longmapsto & {}^tM \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Propriété. Soit $(A,B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p) \times \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Alors, ${}^t(AB) = {}^tB\ {}^tA$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $A \in GL_n(\mathbb{K})$, ${}^tA \in GL_n(\mathbb{K})$ et $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$.

Définition. M est une ***matrice symétrique*** si et seulement si ${}^tM = M$.
M est une ***matrice antisymétrique*** si et seulement si ${}^tM = -M$.

Remarque. Lorsque $\mathrm{car}(\mathbb{K}) \neq 2$, si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est antisymétrique, sa diagonale est nulle.

Notation. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices symétriques d'ordre n.
$\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ désigne l'ensemble des matrices antisymétriques d'ordre n.

Propriété. $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mais ce ne sont pas des sous-algèbres. Cependant, elles sont stables par passage à l'inverse. De plus, $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\dim(\mathcal{S}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n+1)}{2}$, $\dim(\mathcal{A}_n(\mathbb{K})) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.
Il faut savoir le démontrer.

5 Différentes interprétations du produit matriciel

Au niveau des colonnes de la matrice de droite : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{p})$. Si $B_1,\ldots,B_q$ sont des vecteurs colonnes de $\mathbb{K}^p$, $A \times \boxed{B_1}\boxed{B_2}\cdots\boxed{B_q} = \boxed{AB_1}\boxed{AB_2}\cdots\boxed{AB_q}$.

Au niveau des colonnes de la matrice de gauche :

— Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $X \in \mathbb{K}^p$, MX est une combinaison linéaire des colonnes de M.
Plus précisément, si l'on note $M_1,\ldots,M_p$ les colonnes de M et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$,
$MX = x_1M_1 + \cdots + x_pM_p$.

— Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Les colonnes de AB sont des combinaisons linéaires des colonnes de A : en notant $A_1,\ldots,A_p$ les colonnes de A et $B = (b_{i,j})$, la $j^{\text{ème}}$ colonne de AB est égale à $b_{1,j}A_1 + \cdots + b_{p,j}A_p$.

Au niveau des lignes de la matrice de gauche : Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,\mathbf{p})$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(\mathbf{p},q)$. Notons ${}_1A,\ldots,{}_nA$ les lignes de A. Alors $AB = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1A} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nA} \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} \boxed{{}_1AB} \\ \vdots \\ \boxed{{}_nAB} \end{pmatrix}$.

Au niveau des lignes de la matrice de droite :

— Si $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $X \in \mathcal{M}_{1,n}$, XM est une combinaison linéaire des lignes de M.
Plus précisément, si l'on note ${}_1M,\ldots,{}_nM$ les lignes de M et $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)$,
$XM = x_1 \times {}_1M + \cdots + x_n \times {}_nM$.

— Soient $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p,q)$. Les lignes de AB sont des combinaisons linéaires des lignes de B : en notant ${}_1B,\ldots,{}_pB$ les lignes de B et $A = (a_{i,j})$, la $i^{\text{ème}}$ ligne de AB est égale à $a_{i,1} \times {}_1B + \cdots + a_{i,p} \times {}_pB$.

6 Trace d'une matrice

Définition. La ***trace de la matrice*** $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est $Tr(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$.

Propriété. La trace est une forme linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors, $Tr(AB) = Tr(BA)$.
Il faut savoir le démontrer.

ATTENTION : Si $(A, B, C) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^3$, en général $Tr(ABC) \neq Tr(ACB)$.

Définition. Soit $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que A et B sont semblables si et seulement si il existe $P \in GL_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.
La relation de similitude ("être semblable à") est une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition. Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est diagonalisable (resp : trigonalisable) si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale (resp : triangulaire supérieure).

Propriété. Deux matrices semblables ont la même trace, mais la réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.

7 Matrices décomposées en blocs

7.1 Matrices extraites

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}$ et soit I et J deux parties de $\mathbb{N}$ telles que $|I| = n$ et $|J| = p$. Notons $0 \leq i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_n$ les éléments de I et $0 \leq j_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq j_p$ les éléments de J.
Alors on convient d'identifier toute famille $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$ de **scalaires** indexée par $I \times J$ avec la matrice $(M_{i_h,j_k})_{\substack{1\leq h\leq n \\ 1\leq k\leq p}} \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$.

Remarque. Lorsque I ou J est vide, $I \times J = \emptyset$ et $\mathbb{K}^{I\times J}$ possède un unique élément, que l'on appellera la matrice vide.

Définition. Soit $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n, p)$. Une matrice extraite de M est une matrice de la forme $(M_{i,j})_{(i,j)\in I\times J}$, où $I \subset \mathbb{N}_n$ et $J \subset \mathbb{N}_p$.