DM 32 : un corrigé

Ce problème, à quelques modifications près, correspond au sujet de l'École de l'air 1999, filières PC et PSI.

1°) $\diamond$ *Analyse :* supposons qu'il existe une suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les propriétés de l'énoncé.
Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après 3), il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $B_{n+1} = c + (n+1)\int_0^x B_n(t)dt$.
D'après 4), $c = -(n+1)\int_0^1 du \int_0^u B_n(t)dt$,
donc $(R)\ :\ B_{n+1} = (n+1)\left(-\int_0^1 du \int_0^u B_n(t)dt + \int_0^x B_n(t)dt\right)$. De plus, d'après 2), $B_0 = 1$, donc, en identifiant polynômes et fonctions polynômiales, la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est uniquement déterminée par 2) et par la relation de récurrence (R).
En supposant l'existence, on a donc montré l'unicité.
$\diamond$ *Synthèse :* pour montrer l'existence, il suffit de considérer l'unique suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les relations 2) et (R) et de vérifier 3) et 4), ce qui est clair. De plus, on montre par récurrence que le degré de B_n est n :
pour $n = 0$, d'après 2), $deg(B_0) = 0$.
Pour $n \geq 0$, supposons que $deg(B_n) = n$.
D'après 3), $deg(B'_{n+1}) = deg(B_n) = n \geq 0$, donc $deg(B_{n+1}) = n + 1$.

2°)
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $C_n(x) = (-1)^n B_n(1-x)$.

$\diamond$ $C_0 = B_0 = 1$.
$\diamond$ Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$. $C'_n(x) = -(-1)^n B'_n(1-x) = (-1)^{n-1} n B_{n-1}(1-x)$, d'après 3), donc $C'_n(x) = nC_{n-1}(x)$.
$\diamond$ En posant $x = 1-t$, on calcule que
$\int_0^1 C_n(x) = \int_0^1 (-1)^n B_n(1-x)dx = \int_0^1 (-1)^n B_n(t)dt = 0$.
De plus $\deg(C_n) = n$, donc la suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfait les quatre conditions 1) à 4). D'après l'unicité, $\forall n \geq 0, C_n = B_n$.

- $\diamond$ Supposons d'abord que n est pair. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_n(1-t) = B_n(t)$, donc en remplaçant t par $\frac{1}{2} - x$, on obtient que $B_n(\frac{1}{2} + x) = B_n(\frac{1}{2} - x)$, ce qui prouve que le graphe de B_n est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

$\diamond$ Supposons maintenant que n est impair. Alors $B_n(\frac{1}{2} + x) = -B_n(\frac{1}{2} - x)$, donc les deux points du graphe de B_n, de coordonnées $(\frac{1}{2} - x, B_n(\frac{1}{2} - x))$ et $(\frac{1}{2} + x, B_n(\frac{1}{2} + x))$, ont constamment pour milieu le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$. Ainsi, le graphe de B_n est symétrique par rapport à ce dernier point.

3°) Soit $x \in \mathbb{R}$.

D'après la formule de Taylor appliquée en x, $B_n(x+X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} B_n^{(n-k)}(x) \frac{X^{n-k}}{(n-k)!}$.

À l'aide de la relation 3), par récurrence sur k, on montre que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $B_n^{(k)}(X) = n(n-1)\cdots(n-k+1)B_{n-k}(X) = \dfrac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}(X)$.

En reportant cette égalité dans la formule de Taylor,

on en déduit que $B_n(x+X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) X^{n-k}$, ce qu'il fallait démontrer.

4°) $B_0 = 1$ donc $b_0 = 1$.

On calcule successivement avec la relation (R) que : $B_1(x) = x - \frac{1}{2}$,
$B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}$, $\quad B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$,
$B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}$. On en déduit que
$b_0 = 1, \quad b_1 = -\frac{1}{2}, \quad b_2 = \frac{1}{6}, \quad b_3 = 0, \quad b_4 = -\frac{1}{30}$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

◇ $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{n+1} B'_{n+1}(x) dx$, donc $\displaystyle\int_0^1 B_n(x)\,dx = \frac{B_{n+1}(1) - B_{n+1}(0)}{n+1}$.

On en déduit, à l'aide de la relation 4), que pour tout $n \geq 1$, $B_{n+1}(1) = B_{n+1}(0) = b_{n+1}$.
Ainsi, pour tout $n \geq 2$, $b_n = B_n(1)$.

◇ D'après la question 2, $B_{n+1}(1) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(0)$, donc, pour n pair et supérieur ou égal à 1, $b_{n+1} = B_{n+1}(0)$ est égal et opposé à $B_{n+1}(1)$, donc il est nul.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_{2n+1} = 0$.

6°)

◇ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 3 appliquée avec $x = 0$, pour tout $y \in \mathbb{R}$,
$B_n(y) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k y^{n-k}$, donc $B_n(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k X^{n-k}$.

D'après la question précédente, à part $nb_1 X^{n-1}$, les monômes non-nuls de $B_n(x)$ ont tous la parité que n, donc les monômes de Q_n ont tous la parité que n, ce qui montre que $Q_n(-X) = (-1)^n Q_n(X)$. Cette égalité est encore vraie lorsque $n = 0$.

◇ $b_1 = -\frac{1}{2}$, donc la relation précédente s'écrit
$B_n(-X) + \frac{n}{2}(-X)^{n-1} = (-1)^n (B_n(X) + \frac{n}{2} X^{n-1})$, ce qui donne :
$B_n(-X) = (-1)^n \left(B_n(X) + nX^{n-1}\right)$.

◇ D'après la question 2, en remplaçant X par $X+1$, $(-1)^n B_n(X+1) = B_n(-X)$, donc $B_n(X+1) - B_n(X) = (-1)^n B_n(-X) - B_n(X)$, puis d'après la relation précédente,
$B_n(X+1) - B_n(X) = B_n(X) + nX^{n-1} - B_n(X) = nX^{n-1}$.

7°)

◇ D'après la question 3 en substituant y par 1 et n par $n+1$,

$B_{n+1}(X+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(X)$. On en déduit que

$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k(X) = B_{n+1}(X+1) - B_{n+1}(X) = (n+1)X^n$ d'après la question précédente.

$\diamond$ En substituant X par 0 dans cette dernière relation, on obtient
$\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} b_k = (n+1)0^n = 0$ lorsque $n \in \mathbb{N}^*$.

8°) $\diamond$ D'après la question 6, $x^N = \dfrac{B_{N+1}(x+1) - B_{N+1}(x)}{N+1}$,

donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^N = \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{K}(B_{N+1}(m+1) - B_{N+1}(m))$. Il s'agit d'une somme télescopique,

donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^N = \frac{B_{N+1}(K+1) - B_{N+1}(0)}{N+1} = \frac{B_{N+1}(K+1) - b_{N+1}}{N+1}$.

$\diamond$ Lorsque $N = 2$, on obtient
$\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^2 = \frac{1}{3}(B_3(K+1) - b_3) = \frac{1}{3}((K+1)^3 - \frac{3}{2}(K+1)^2 + \frac{1}{2}(K+1))$,

donc $\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^2 = \frac{K+1}{6}(2(K^2+2K+1) - 3(K+1) + 1) = \frac{K+1}{6}(2K^2+K)$.

On retrouve bien la formule usuelle : $\displaystyle\sum_{m=0}^{K} m^2 = \frac{K(K+1)(2K+1)}{6}$.

9°) Notons E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et u l'application de E dans E définie par : pour tout $f \in E$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $u(f)(x) = f(x+1) - f(x)$. Ainsi, l'équation (E_g) s'écrit $u(f) = g$. Or u est linéaire, car pour tout $f_1, f_2 \in E$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} u(\alpha f_1 + f_2)(x) &= (\alpha f_1 + f_2)(x+1) - (\alpha f_1 + f_2)(x) \\ &= \alpha(f_1(x+1) - f_1(x)) + (f_2(x+1) - f_2(x)) \\ &= \alpha u(f_1)(x) + u(f_2)(x) \\ &= (\alpha u(f_1) + u(f_2))(x). \end{aligned}$$

Ainsi (E_g) est bien une équation linéaire.

10°) En identifiant polynômes formels et applications polynomiales, d'après la question 6, pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, $u\Big(\dfrac{1}{n+1}B_{n+1}\Big) = X^n$, donc par linéarité de u,
$u\Big(\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1}B_{k+1}(X)\Big) = \sum_{k=0}^{N} a_k X^k = g$.

Ainsi, $f_0 = \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{a_k}{k+1}B_{k+1}(X)$ est une solution particulière de (E_g).

D'après le cours, l'ensemble des solutions de (E_g) est alors le sous-espace affine
$f_0 + \mathrm{Ker}(u) = f_0 + \mathcal{P}$.

11°)
$\diamond$ Supposons que (E_g) possède au moins une solution f telle que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L \in \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{N} g(x+n) &= \sum_{n=0}^{N}(f(x+n+1) - f(x+n)) \\ &= f(x+N+1) - f(x) \\ &\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} L - f(x),\end{aligned}$$

donc la série $\sum_n g(x+n)$ converge. De plus, $\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) = L - f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} L - L = 0$.

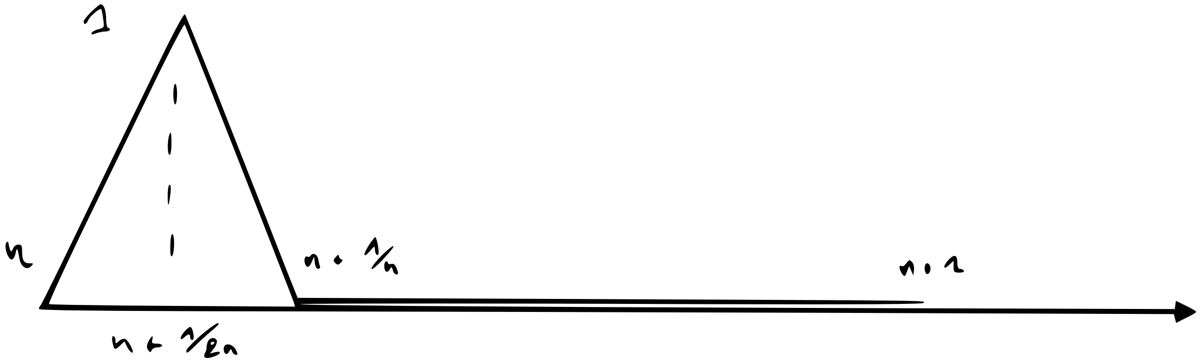
$\diamond$ Réciproquement, supposons que la série $\sum_n g(x+n)$ converge pour tout $x \in \mathbb{R}$ et que $\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Posons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$.
Ainsi, $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \in \mathbb{R}$. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$f(x+1) - f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty}(g(x+n+1) - g(x+n))$. C'est encore une somme télescopique, et $g(x+n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la série $\sum_n g(x+n)$ converge. Ainsi, $f(x+1) - f(x) = g(x)$, ce qui prouve que f est une solution de (E_g).

12°) Soit $x \in \mathbb{R}$. $\sum g(x+n) = \sum e^{-\lambda x}(e^{-\lambda})^n$ et $e^{-\lambda} \in [0, 1[$,
donc il s'agit d'une série géométrique convergente.
Posons $f(x) = -\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$. Ainsi, $-f(x) = \dfrac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après la question précédente, l'application $f \ : \ x \longmapsto -\dfrac{e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$ est une solution de (E_g) et l'ensemble des solutions de (E_g) est le sous-espace affine $f + \mathcal{P}$.

13°) Il suffit de construire un contre-exemple.
$\diamond$ Notons h l'application définie par les relations suivantes :

- Pour tout $x \in]-\infty, 1]$, $h(x) = 0$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [n, n + \frac{1}{2n}]$, $h(x) = 2n(x - n)$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [n + \frac{1}{2n}, n + \frac{1}{n}]$, $h(x) = 1 - 2n(x - n - \frac{1}{2n})$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tout $x \in [n + \frac{1}{n}, n + 1]$, $h(x) = 0$.

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, sur $[n, n+1]$, le graphe de h est le suivant :



Pour tout $x \in \mathbb{R}$, notons $g(x) = h(x) - h(x+1)$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathbb{R}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, (1) : $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} g(x+n) = \sum_{n=0}^{N}(h(n+x) - h(n+x+1)) = h(x) - h(x+N+1)$.

$x = \lfloor x \rfloor + f$, où $f \in [0,1[$.

Si $x \in \mathbb{N}$, $h(x+N+1) = 0 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Supposons maintenant que $x \notin \mathbb{N}$.

Pour tout $N \in \mathbb{N}$, $x + N + 1 = (\lfloor x \rfloor + N + 1) + f$.

Or $\dfrac{1}{N+1+\lfloor x \rfloor} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f > 0$, donc il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que,

pour tout $N \geq N_0$, $\dfrac{1}{N+1+\lfloor x \rfloor} \leq f$.

Ainsi, pour tout $N \geq N_0$, $h(x+N+1) = 0$, donc,

dans ce cas également, $h(x+N+1) = 0 \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

La relation (1) montre alors que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la série $\displaystyle\sum_n g(x+n)$ est convergente.

De plus, $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n) = h(x)$.

Mais, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $h(n + \frac{1}{2n}) = 1$, donc $h(x)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$, ce qui montre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} g(x+n)$ ne tend pas vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.