Feuille d'exercices 21.
Corrigé d'un exercice

Exercice 21.14 :

La partie entière étant nulle, la décomposition en éléments simples de $F(X) = \dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)}$ est de la forme $F(X) = \dfrac{a}{X-1} + \dfrac{b}{(X-1)^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\lambda_k}{X-\omega^k}$, où $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$.

$\diamond$ Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après le cours,

$\lambda_k = \dfrac{1}{[(X-1)(X^n-1)]'(\omega^k)} = \dfrac{1}{[(X^n-1)+(X-1)nX^{n-1}](\omega^k)} = \dfrac{1}{(\omega^k-1)n\omega^{kn-k}}$,

donc $\lambda_k = \dfrac{\omega^k}{n(\omega^k-1)}$.

$\diamond$ Pour calculer a et b, on procède par développement limité : D'après la décomposition de F en éléments simples, $(t-1)^2F(t) = b + a(t-1) + (t-1)^2G(t)$, où G est une application continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. En particulier, G est bornée au voisinage de 1, donc $(t-1)^2F(t) = b + a(t-1) + o(t-1)$.

D'autre part, en posant $u = t-1$, $(t-1)^2F(t) = \dfrac{u^2}{u((u+1)^n-1)}$,

donc d'après la formule du binôme de Newton,

$(t-1)^2F(t) = \dfrac{u}{(nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + o(u^2))} = \dfrac{1}{n}(1 + \dfrac{n-1}{2}u + o(u))^{-1}$,

donc $(t-1)^2F(t) = \dfrac{1}{n}(1 + \dfrac{1-n}{2}u + o(u)) = \dfrac{1}{n} + \dfrac{1-n}{2n}(t-1) + o(t-1)$.

Par unicité du développement limité, on en déduit que $b = \dfrac{1}{n}$ et $a = \dfrac{1-n}{2n}$.

En conclusion, $\dfrac{1}{(X-1)(X^n-1)} = -\dfrac{n-1}{2n(X-1)} + \dfrac{1}{n(X-1)^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{\omega^k}{n(\omega^k-1)(X-\omega^k)}$.