# Feuille d'exercices 22.
# Matrices

**Exercice 22.1 :** (niveau 1)
On pose $E = \mathbb{R}_2[X]$. On note $U = 1$, $V = 1 - X$ et $W = (1 - X)^2$.

**1°)** Montrer que $(U, V, W)$ est une base de $E$.

**2°)** On pose $\begin{array}{rccc} v: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(2) \end{array}$, $\begin{array}{rccc} d: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P' \end{array}$
et $\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & E \\ & P & \longmapsto & P(X+1) - P(X-1) \end{array}$.
Montrer que $v$, $d$ et $f$ sont des applications linéaires et donner leur matrice dans la base $(U, V, W)$.

**Exercice 22.2 :** (niveau 1)

**1°)** Soit $M, P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $P$ est inversible. On pose $D = P^{-1}MP$.
Montrer que, pour tout $k \geq 0$, $M^k = PD^kP^{-1}$.

**2°)** On pose $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
Déterminer $P^{-1}$ et calculer $D = P^{-1}MP$.
Pour tout $k \geq 0$, calculer $D^k$ puis $M^k$.

**Exercice 22.3 :** (niveau 1)
Calculez le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ c & c & d & d \\ ac & bc & ad & bd \end{pmatrix}$, où $a$, $b$, $c$ et $d$ sont 4 réels quelconques.

**Exercice 22.4 :** (niveau 1)

**1°)** Soit $D$ une matrice diagonale de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont deux à deux distincts. Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ qui commutent avec $D$.

**2°)** Déterminer les matrices de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ qui commutent avec toutes les matrices diagonales.

**Exercice 22.5 :** (niveau 1)
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$, et $a$ et $b$ deux éléments de $L(E)$.
Montrer que $|rg(a) - rg(b)| \leq rg(a + b) \leq rg(a) + rg(b)$.

**Exercice 22.6 :** (niveau 1)
Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$. Démontrer que $A^2 - Tr(A)A + \det(A)I_2 = 0$.
En déduire qu'il existe deux suites $(\alpha_n), (\beta_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = \alpha_n A + \beta_n I_2$.
En déduire le calcul de $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{pmatrix}^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 22.7 :** (niveau 1)
Calculer $A^n$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

**Exercice 22.8 :** (niveau 1)
Soit $a \in \mathbb{C}^*$. On note $f$ l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + a\overline{z}$.

**1°)** Montrer que $f$ est $\mathbb{R}$-linéaire mais qu'elle n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire.

**2°)** Déterminer la matrice de $f$ dans la $\mathbb{R}$-base $(1, i)$.

**3°)** Déterminer les noyau et image de $f$.

**Exercice 22.9 :** (niveau 1)
$E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n$.
$u$ désigne un endomorphisme de $L(E)$ tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.
Chercher une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a une forme simple.

**Exercice 22.10 :** (niveau 1)
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension paire $n = 2p$ et $f \in L(E)$.
Etablir l'équivalence des trois propositions :
1) $f^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(f) = p$ ;
2) $\mathrm{Im}f = \mathrm{Ker}f$ ;
3) il existe une base $\mathcal{B}$ de $E$ telle que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & I_p \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.11 :** (niveau 2)

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**1°)** Vérifier que $A^3 - 7A^2 + 13A = 3I_3$. En déduire que $A$ est inversible.

**2°)** La matrice $B$ est-elle inversible ? Calculer $B^3$.

**3°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On suppose que $M$ satisfait la relation polynomiale $a_p M^p + \cdots + a_1 M + a_0 I_n = 0$, où $p \geq 1$, $a_0, \ldots, a_p \in \mathbb{K}$ et $a_p \neq 0$. On suppose de plus que $M$ ne satisfait pas de relation polynomiale (avec des coefficients non tous nuls) de degré strictement inférieur à $p$.
A quelle condition la matrice $M$ est-elle inversible ?

**Exercice 22.12 :** (niveau 2)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, inverser la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 & \cdots & a^{n-1} \\ 0 & 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & a^2 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$, à l'aide de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 22.13 :** (niveau 2)

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{\mathbb{C}}(n)$ telle que : $\forall i \in \{1, \ldots, n\} \quad |a_{i,i}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ j \neq i}} |a_{i,j}|$.

Montrer que $A$ est inversible.

**Exercice 22.14 :** (niveau 2)

Fixons $M$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**1°)** Montrer que l'application $A \longmapsto Tr(AM)$ où A appartient à $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est une forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

**2°)** A-t-on ainsi toutes les formes linéaires sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ ?

**Exercice 22.15 :** (niveau 2)
Notons $(E_{i,j})_{(i,j)\in\{1,\dots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\sigma$ une application linéaire de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telle que : $\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2,\ \ \sigma(AB)=\sigma(BA)$.

**1°)** Pour tout $i,j,k,h\in\{1,\dots,n\}$, montrer que $E_{i,j}E_{k,h}=\delta_{j,k}E_{i,h}$.

**2°)** Pour $i\neq j$, calculer $\sigma(E_{i,j})$.

**3°)** Comparer $\sigma(E_{i,i})$ et $\sigma(E_{j,j})$.

**4°)** En déduire l'ensemble des applications linéaires $\sigma$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, telles que $\forall (A,B)\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2 \quad \sigma(AB)=\sigma(BA)$.

**Exercice 22.16 :** (niveau 2)
Calculer le rang de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient est égal à $\sin(i+j)$.

**Exercice 22.17 :** (niveau 2)
Soit $A\in\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

**1°)** Montrer que $\text{rg}(A)=1$ si et seulement si il existe $X,Y\in\mathbb{K}^n\setminus\{0\}$ tels que $A=X{}^tY$.

**2°)** On suppose que $\text{rg}(A)=1$.
a) Montrer que $A^2=\text{Tr}(A)A$.
b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, calculer $(I_n+A)^k$.

**Exercice 22.18 :** (niveau 2)
Polynômes d'interpolation d'Hermite :
Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in\mathbb{N}^*$. $n_0,\dots,n_p$ désignent $p+1$ entiers strictement positifs tels que $n_0+\cdots+n_p=n$.
Soient $a_0,\dots,a_p$ $p+1$ éléments d'un sous-corps de $\mathbb{C}$ noté $\mathbb{K}$, et pour tout $i\in\{0,\dots,p\}$, pour tout $j\in\{0,\dots,n_i-1\}$, soit $u_{i,j}\in\mathbb{K}$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme $u$ de degré strictement inférieur à $n$ tel que pour tout $i\in\{0,\dots,p\}$ et pour tout $j\in\{0,\dots,n_i-1\}$, $u^{(j)}(a_i)=u_{i,j}$.

**Exercice 22.19 :** (niveau 2)
$E$ et $F$ sont deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels. $G$ est un sous-espace vectoriel de $F$.
On suppose que $E$ et $G$ sont de dimensions finies. Soit $u\in L(E,F)$.
Montrer que $dim(u^{-1}(G))=dim(E)-rg(u)+dim(Im(u)\cap G)$.

**Exercice 22.20 :** (niveau 2)
Soit $f$ un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel $E$ de dimension finie $s\geq 1$. Montrer que les suites $(Ker(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ et $(Im(f^n))_{n\in\mathbb{N}}$ sont stationnaires à partir du même rang $p\leq s$ et que l'on a alors : $Ker(f^p)\oplus Im(f^p)=E$.

**Exercice 22.21 :** (niveau 3)
$E$, $F$, $G$ et $H$ désignent 4 $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Soit $f\in L(E,F)$, $g\in L(F,G)$ et $h\in L(G,H)$. Montrer que $rg(gf)+rg(hg)\leq rg(g)+rg(hgf)$.

**Exercice 22.22 :** (niveau 3)
Soit $A \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n)$ et $B \in \mathcal{M}_{\mathbb{K}}(p)$. On note $\Psi$ l'application de $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ dans $\mathcal{M}_{\mathbb{K}}(n,p)$ définie par : $\Psi(M) = AMB$.
Montrer que $Tr(\Psi) = Tr(A) \times Tr(B)$.

**Exercice 22.23 :** (niveau 3)
Montrer que les seuls idéaux bilatères de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont $\{0\}$ et $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
*Indication :* on pourra commencer par montrer qu'un idéal bilatère non nul de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au moins une matrice de rang 1.

**Exercice 22.24 :** (niveau 3)
Pour tout $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, on dit que A est positive si et seulement si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], a_{i,j} \geq 0$.
Pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on dit que A est monotone si A est inversible et $A^{-1}$ est positive.

**1°)** Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est monotone si et seulement si $\forall X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ AX$ positive $\Longrightarrow X$ positive.

**2°)** Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}_+^n$ et $A = \begin{pmatrix} 2+a_1 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 2+a_n \end{pmatrix}$ (les coefficients sont égaux à 0 hors de la diagonale, et des sur- et sous-diagonales). Montrer que A est monotone.

## Exercices supplémentaires

**Exercice 22.25 :** (niveau 1)
Déterminer la matrice dans les bases canoniques de l'application linéaire $f$ de $\mathbb{R}_3[X]$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par $f(P) = (P(1), P(2), P(3), P(4))$.

**Exercice 22.26 :** (niveau 1)
Soit $A, B, C$ trois matrices non nulles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $ABC = 0$.
Montrer qu'au moins 2 de ces matrices ne sont pas inversibles.

**Exercice 22.27 :** (niveau 1)
Soit $A$ et $B$ deux matrices symétriques de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que $A$ et $B$ commutent si et seulement si $AB$ est symétrique.

**Exercice 22.28 :** (niveau 1)
Déterminer la matrice $M$ canoniquement associée à l'application linéaire $f$, de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y \\ y-2x+z \end{pmatrix}$.
Déterminer le noyau et l'image de la matrice $M$.

**Exercice 22.29 :** (niveau 1)
On note $E = \mathbb{R}_n[X]$. $f$ désigne l'endomorphisme de $E$ défini par : pour tout $P \in E$, $f(P) = P - P'$.

**1°)** Montrer que $f$ est bijective
  a) sans la matrice de $f$,
  b) avec la matrice de $f$.

**2°)** Montrer que pour tout $Q \in E$, il existe $P$ tel que $P - P' = Q$. Donner une expression de $P$ en fonction de $Q$.

**Exercice 22.30 :** (niveau 1)
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $(u_1, ..., u_n)$ un système de $n$ vecteurs de rang $r$. Soit $m \in \mathbb{N}_n$. Notons $s$ le rang de $(u_1, ..., u_m)$.

**1°)** Montrer que $\mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_n) = \mathrm{Vect}(u_1, \dots, u_m) + \mathrm{Vect}(u_{m+1}, \dots, u_n)$.

**2°)** Montrer que $n - r \geq m - s$.

**Exercice 22.31 :** (niveau 1)
$\Phi$ désigne l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même définie par $\Phi(P) = P(X) - P(X-1)$.

**1°)** Donner la matrice de $\Phi$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

**2°)** Donner $Ker(\Phi)$ et $Im(\Phi)$.

**Exercice 22.32 :** (niveau 1)
On suppose que $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $A$ et $B$ deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = AB - BA$.
Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\mathrm{Tr}(A^p)$.

**Exercice 22.33 :** (niveau 1)
Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, .., a_n$ $n+1$ réels distincts.

**1°)** Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, on note $\Phi_k$ la forme linéaire sur $E$ définie par : $\Phi_k(P) = P(a_k)$. Montrer que $(\Phi_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $L(E, \mathbb{R})$.

**2°)** Montrer qu'il existe un unique polynôme $A \in E$ tel que, pour tout $P \in E$, $\displaystyle\int_0^1 P(t)dt = \sum_{k=0}^{n} A(a_k)P(a_k)$.

**Exercice 22.34 :** (niveau 2)
Soit $A$ et $B$ deux matrices carrées de taille $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ : on note $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices.
Résoudre l'équation suivante, en l'inconnue $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ :

$$X + Tr(X)A = B.$$

**Exercice 22.35 :** (niveau 2)
Soit $(p, n) \in \mathbb{N}^{*2}$. On note $M$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dont le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient est égal à $(p + i + j - 2)^2$. Déterminer le rang de $M$.

**Exercice 22.36 :** (niveau 2)
Soient $A$ et $B$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AMB = 0$.
Montrer que $A = 0$ ou $B = 0$.

**Exercice 22.37 :** (niveau 2)
On suppose que le corps $\mathbb{K}$ est de caractéristique nulle.
Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $AB - BA \neq I_n$.
Donner un exemple d'espace vectoriel $E$ et d'endomorphismes $u, v \in L(E)$ tels que $uv - vu = Id_E$.

**Exercice 22.38 :** (niveau 2)
Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F$ et $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$. Montrer qu'il existe $u \in L(E)$ tel que $F = Im(u)$ et $G = Ker(u)$ si et seulement si $dim(F) + dim(G) = dim(E)$.

**Exercice 22.39 :** (niveau 2)
$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices de taille $n$ à coefficients réels.
$S_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices $A = (a_{i,j})$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :
Pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$ $a_{i,i} \geq a_{i,j} \geq 0$, et pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} = 1$.

**1°)** Montrer que pour tout $P$ appartenant à $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $Tr({}^tPP) \geq 0$.

**2°)** Montrer que pour tout $P$ appartenant à $S_n(\mathbb{R})$, $Tr({}^tPP) \leq Tr(P)$.

**3°)** Trouver toutes les matrices de $S_n(\mathbb{R})$ telles que l'inégalité précédente soit une égalité.

**4°)** Dénombrer les matrices de la question précédente.

**Exercice 22.40 :** (niveau 2)
Soient $A$ et $B$ dans $M_n(\mathbb{R})$. On suppose que $A$ est inversible et que $B^n = 0$.
Montrer que $C = I_n + A^{-1}BA$ est inversible et préciser son inverse.

**Exercice 22.41 :** (niveau 2)
Soit $(P_n)$ une suite d'éléments de $\mathbb{R}[X]$ telle que :
$\forall n \in \mathbb{N}\ deg(P_{n+1}) > deg(P_n)$. Montrez que $(P_n)$ est une base si et seulement si, pour tout $n$, $deg(P_n) = n$.

**Exercice 22.42 :** (niveau 2)
Soient $E$, $F$ deux espaces vectoriels de dimensions finies et $(u, v) \in L(E, F)^2$.
Montrer que $dim(Ker(u + v)) \leq dim(Keru \cap Kerv) + dim(Imu \cap Imv)$.

**Exercice 22.43 :** (niveau 2)
$E$ désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On fixe $u \in L(E)$ tel que $u^2 = 0$.
Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ et une base de $E$ dans laquelle la matrice de $u$ a des coefficients tous nuls saufs ceux de position $(i + r, i)$, pour tout $i \in \{1, \ldots, r\}$, qui sont égaux à 1.

**Exercice 22.44 :** (niveau 2)
Soit $F$ un sous-espace vectoriel de dimension finie de $\mathbb{C}[X]$.

**1°)** Montrer que $F$ possède une base constituée de polynômes ayant tous le même degré.

**2°)** Montrer que $F$ possède une base $(P_1, \ldots, P_n)$ pour laquelle la suite $(\deg(P_i))_{1 \leq i \leq n}$ est strictement croissante.

**Exercice 22.45 :** (niveau 2)
Notons $(E_{i,j})_{(i,j) \in \{1,\ldots,n\}^2}$ la base canonique de $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)$ : ainsi, pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $E_{i,j}$ est la matrice carrée de taille $n$ dont tous les coefficients sont nuls, sauf celui de position $(i, j)$ qui est égal à 1.

**1°)** Calculer $E_{i,j}E_{k,l}$.

**2°)** On pose $\mathcal{T} = \text{Vect}(\{AB - BA/(A, B) \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n)^2\})$ et $\mathcal{H} = \{\lambda I_n/\lambda \in \mathbb{R}\}$, où $I_n$ désigne la matrice identité.
Montrer que $dim(\mathcal{T}) = n^2 - 1$ et en déduire que $\mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n) = \mathcal{T} \oplus \mathcal{H}$.

**Exercice 22.46 :** (niveau 3)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

**1°)** Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})^2$ avec $A^n = 0$, $AB = BA$ et $B \neq 0$.
Montrer que $rg(AB) < rg(B)$.

**2°)** Soit $A_1, \ldots, A_n$ $n$ matrices nilpotentes de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux.
Montrer que $A_1 \times \cdots \times A_n = 0$.

**Exercice 22.47 :** (niveau 3)
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $a < b$, $n$ un entier supérieur ou égal à 2 et
$(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que $a = a_1 < a_2 < \cdots < a_{n-1} < a_n = b$.
On note $\mathcal{F}$ l'ensemble des applications continues de $[a, b]$ dans $\mathbb{R}$ pour lesquelles :

$$\forall i \in \{2, \ldots, n\} \ \exists(\alpha_i, \beta_i) \in \mathbb{R}^2 \ \forall x \in ]a_{i-1}, a_i[ \ f(x) = \alpha_i x + \beta_i.$$

**1°)** Montrer que $\mathcal{F}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

**2°)** Pour $f \in \mathcal{F}$, on pose $\varphi(f) = (f(a_1), f(a_2) - f(a_1), ..., f(a_n) - f(a_{n-1}))$.
A l'aide de $\varphi$, montrer que $dim(\mathcal{F}) \leq n$.

**3°)** Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\begin{array}{rccc} f_j : & [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & |x - a_j| \end{array}$.
Montrer que $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_n}$ est une base de $\mathcal{F}$.

**4°)** Montrer que les éléments convexes de $\mathcal{F}$ sont ceux de la forme :

$$x \longmapsto \alpha x + \beta + \sum_{j=2}^{n-1} \gamma_j |x - a_j|, \text{ où } \forall j \in \{2, \ldots, n-1\} \ \gamma_j \geq 0.$$

**Exercice 22.48 :** (niveau 3)
Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in L(E)$.
Notons $\mathcal{P} = \{P(u)/P \in \mathbb{K}[X]\}$ et $\mathcal{C} = \{v \in L(E)/v \circ u = u \circ v\}$.

**1°)** Montrer que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{C}$ sont des sous-espaces vectoriels de $L(E)$ et que $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{C}$.

**2°)** Soit $x \in E$. Montrer que le plus petit sous-espace vectoriel de $E$ contenant $x$ qui est stable par $u$ est $F_x = \{P(u)(x)/P \in \mathbb{K}[X]\}$.

**3°)** Si $x \in E$, on dira que $x$ est $u$-générateur si et seulement si $F_x = E$.
Notons $\begin{array}{rccc} \varphi_x : & L(E) & \longrightarrow & E \\ & v & \longmapsto & v(x) \end{array}$. Montrer que $x$ est $u$-générateur si et seulement si $\varphi_{x/\mathcal{P}}$ est surjective.

**4°)** Montrer que si $x$ est $u$-générateur alors $\varphi_{x/\mathcal{C}}$ est injective.
En déduire que si $E$ possède un $u$-générateur, alors $\mathcal{P} = \mathcal{C}$ et $E$ est isomorphe à $\mathcal{C}$.

**Exercice 22.49 :** (niveau 3)
$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. $E$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

**1°)** Déterminer les endomorphismes $f$ de $E$ tels que $\forall x \in E \ (x, f(x))$ est lié.

**2°)** En déduire $\{g \in L(E)/\forall h \in GL(E) \ h \circ g = g \circ h\}$.

**3°)** Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note $g_n$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par
$\forall P \in \mathbb{R}_n[X] \ g_n(P) = P'$.
On note $C(g_n) = \{f \in L(\mathbb{R}_n[X])/f \circ g_n = g_n \circ f\}$. Déterminer $dim(C(g_n))$, puis déterminer $C(g_n)$.

**Exercice 22.50 :** (niveau 3)
On note $M$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, triangulaire supérieure, dont tous les coefficients du triangle supérieur (diagonale comprise) sont égaux à 1. Calculer $M^3$.

**Exercice 22.51 :** (niveau 3)
Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'ensemble des permutations $\sigma$ de $\mathcal{S}_p$ telles que,
pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $(M_1, \ldots, M_p) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^p$,
$Tr(M_1 \times \cdots \times M_p) = Tr(M_{\sigma(1)} \times \cdots \times M_{\sigma(p)})$.

**Exercice 22.52 :** (niveau 3)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p$ un nombre premier.

**1°)** Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, montrer que $\mathrm{Tr}((A+B)^p) \equiv \mathrm{Tr}(A^p) + \mathrm{Tr}(B^p)$ $[p]$.

**2°)** En déduire que pour tout $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, $\mathrm{Tr}(A^p) \equiv \mathrm{Tr}(A)$ $[p]$.