

DM 35 : corrigé

Ce sujet est tiré de Centrale PC 2016, avec quelques aménagements mineurs.

I L'opérateur de translation et l'opérateur de différence

I.A - L'opérateur de translation

I.A.1) \diamond Soit $P, Q \in \mathbb{R}_n[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. $\tau(\alpha P + Q) = (\alpha P + Q)(X + 1)$ et d'après le cours,

$\tau(\alpha P + Q) = \alpha P(X + 1) + Q(X + 1) = \alpha \tau(P) + \tau(Q)$. Ainsi τ est une application linéaire, de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même, donc c'est bien un endomorphisme.

\diamond Soit $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$, un polynôme non nul de $\mathbb{R}_n[X]$, de degré $d = \deg(P)$ (i.e. $a_d \neq 0$).

Alors, $\tau(P)$ est de la forme :

$$\tau(P) = P(X + 1) = \sum_{k=0}^d a_k (X + 1)^k = a_d X^d + (d a_d + a_{d-1}) X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\deg(\tau(P)) = \deg(P) \text{ et } \text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P)}$$

I.A.2) Notons que $\tau^0(P) = P$.

**Et que si $\tau^k(P)(X) = P(X + k)$, alors $\tau^{k+1}(P)(X) = \tau(\tau^k(P))(X) = P((X + k) + 1) = P(X + (k + 1))$.
Ainsi, par récurrence**

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \tau^k(P)(X) = P(X + k)}$$

I.A.3) D'après la formule du binôme de Newton (changement de variable $i = h + 1$),

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau(P_j)(X) = (X + 1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} X^h = \sum_{i=1}^j \binom{j-1}{i-1} P_i$$

M est donc triangulaire supérieure et les coefficients de M vérifient

$$\boxed{\forall i, j \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket, (M)_{i,j} = \begin{cases} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

I.A.4) \diamond Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Supposons que λ est une valeur propre de τ . Alors il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $P \neq 0$ et $\tau(P) = \lambda P$. On en déduit que $\text{cd}(\tau(P)) = \lambda \text{cd}(P)$, or $\text{cd}(\tau(P)) = \text{cd}(P) \neq 0$, donc $\lambda = 1$. Ainsi, τ admet au plus une valeur propre, égale à 1.

Réciproquement, en prenant $P = 1$, $\tau(P) = P$ et $P \neq 0$, donc τ possède une unique valeur propre, égale à 1.

\diamond Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un vecteur propre de τ . Alors $P \neq 0$ et $P(X) = \tau(P) = P(X + 1)$. On en déduit que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $P = \tau^k(P) = P(X + k)$, donc substituant X par 0, $P(0) = P(k)$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Ainsi $P - P(0)$ possède une infinité de racines, donc il est identiquement nul. Donc P est un polynôme constant, c'est-à-dire un réel.

Supposons que τ est diagonalisable. Alors $\mathbb{R}_n[X]$ possède une base de vecteurs propres, donc une base constituée de vecteurs de \mathbb{R} . Ainsi, $\mathbb{R}_n[X] \subset \mathbb{R}$ et $n \leq 0$, ce qui est faux. Ainsi τ n'est pas diagonalisable.

I.A.5) Notons $\bar{\tau} : \mathbb{R}_n[X] \rightarrow \mathbb{R}_n[X]$ défini par $\bar{\tau}(P(X)) = P(X - 1)$.

On vérifie que $\tau \circ \bar{\tau} = \bar{\tau} \circ \tau = \text{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}$:

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \tau(\bar{\tau}(P))(X) = \bar{\tau}(P)(X + 1) = P(X) = \tau(\bar{\tau}(P))(X)$$

Donc τ est une bijection et

$$\tau^{-1}(P)(X) = P(X - 1)$$

Puis, comme pour la question 2), on montre que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\tau^{-k}(P)(X) = P(X - k)$.
Donc la formule est toujours vraie :

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \tau(P)(X) = P(X + k)$$

I.A.6) Avec l'expression de τ^{-1} , on applique la même méthode qu'en 3) et on obtient :

$$\forall j \in \mathbb{N}_{n+1}, \tau^{-1}(P_j)(X) = (X - 1)^{j-1} = \sum_{h=0}^{j-1} \binom{j-1}{h} (-1)^{j-1-h} X^h = \sum_{i=1}^j (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} P_i$$

Puis

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, (M^{-1})_{i,j} = \begin{cases} (-1)^{j-i} \binom{j-1}{i-1} & \text{pour } i \leq j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

I.A.7) Posons U le vecteur colonne de \mathbb{R}^{n+1} dont les composantes sont u_0, \dots, u_n et V le vecteur colonne de \mathbb{R}^{n+1} dont les composantes sont v_0, \dots, v_n . La $k+1$ ^e ligne de l'égalité $V = Q \times U$ s'écrit

$$v_k = \sum_{j=1}^{n+1} Q_{k+1,j} u_{j-1} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} u_j$$

On peut identifier (après changement d'indice) : $Q_{k,j} = \begin{cases} \binom{k-1}{j-1} & \text{pour } j \leq k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

On a donc

$$Q = M^T$$

I.A.8) M est inversible, donc $Q = M^T$ également et $Q^{-1} = (M^T)^{-1} = (M^{-1})^T$.

Puis par équivalence : $V = Q \times U \iff U = Q^{-1} \times V = (M^{-1})^T \times V$.

La $k+1$ ^e ligne de ce calcul donne alors

$$u_k = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1})^T)_{k+1,j} v_{j-1} = \sum_{j=1}^{n+1} ((M^{-1}))_{j,k+1} v_{j-1} = \sum_{j=0}^k ((M^{-1}))_{j+1,k+1} v_j$$

$$u_k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j$$

I.A.9) On a alors

$$v_k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \lambda^j = (\lambda + 1)^k$$

On vérifie bien :

$$\sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} v_j = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (\lambda + 1)^j (-1)^{k-j} = ((\lambda + 1) - 1)^k = u_k$$

I.B - L'opérateur de différence

I.B.1) Avec les mêmes notations qu'en 1.A.1), avec P non constant on a :

$$\delta(P)(X) = a_d X^d + (da_d + a_{d-1})X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} b_k X^k - a_d X^d - a_{d-1} X^{d-1} - \sum_{k=0}^{d-2} a_k X^k = da_d X^{d-1} + \sum_{k=0}^{d-2} c_k X^k$$

Comme $a_d \neq 0$:

$$\boxed{\text{si } P, \text{ non constant, } \deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1 \text{ et } \text{cd}(\delta(P)) = \deg(P) \times \text{cd}(P)}$$

I.B.2) D'après la question précédente, si P n'est pas constant, $\deg(P) \geq 1$ et $\deg(\delta(P)) \geq 0$, donc $\delta(P)$ n'est pas nul. Ainsi, si $\delta(P) = 0$, alors P est constant.

Réciproquement, si P est constant, le calcul (simple) donne $\delta(P) = 0$.

Donc

$$\boxed{\ker(\delta) = \mathbb{R}_0[X]}$$

La question précédente montre aussi que $\text{Im}(\delta) \subset \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Or d'après le théorème du rang : $\dim(\text{Im}(\delta)) = n + 1 - \dim(\ker(\delta)) = n = \dim(\mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Donc :

$$\boxed{\text{Im}(\delta) = \mathbb{R}_{n-1}[X]}$$

I.B.3) Démontrons par récurrence que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

L'initialisation, pour $j = 1$ résulte de la question précédente.

◇ Pour j tel que $1 \leq j < n$, supposons que $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

Alors $\text{Im}(\delta^{j+1}) = \delta^{j+1}(\mathbb{R}_n[X]) = \delta(\delta^j(\mathbb{R}_n[X])) = \delta(\text{Im}(\delta^j))$, donc $\text{Im}(\delta^{j+1}) = \delta(\mathbb{R}_{n-j}[X])$, mais d'après la question précédente, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\delta(\mathbb{R}_p[X]) = \mathbb{R}_{p-1}[X]$,

donc $\text{Im}(\delta^{j+1}) = \mathbb{R}_{n-j-1}[X]$, ce qui prouve la propriété à l'ordre $j + 1$.

Ainsi, d'après le principe de récurrence, pour tout $j \in \mathbb{N}$, $\text{Im}(\delta^j) = \mathbb{R}_{n-j}[X]$.

◇ Lorsque $\deg(P) \geq 1$, on a vu que $\deg(\delta(P)) = \deg(P) - 1$, et lorsque $\deg(P) \leq 0$, $\delta(P) = 0$.

On en déduit par récurrence que, pour tout $j \in \mathbb{N}^*$, si $\deg(P) \geq j$, alors $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j$ et si $\deg(P) \leq j - 1$, alors $\delta^j(P) = 0$.

Soit j tel que $1 \leq j \leq n$.

Si $\deg(P) \geq j$, alors $\deg(\delta^j(P)) = \deg(P) - j \geq 0$, donc $\delta^j(P) \neq 0$ et $P \notin \ker(\delta^j)$.

Au contraire, lorsque $\deg(P) \leq j - 1$, $\delta^j(P) = 0$. En conclusion, $\ker(\delta^j) = \mathbb{R}_{j-1}[X]$.

I.B.4) Par construction, $\delta = \tau - \text{id}$, or id et δ commutent, donc d'après la formule de Newton

$$\boxed{\forall k \in \mathbb{N}, \delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau^j}$$

I.B.5) Si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X] = \ker(\delta^n)$, alors $\delta^n(P) = 0$. Donc :

$$0 = [\delta^n(P)](X) = \left[\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \tau^j(P) \right](X) = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} [\tau^j(P)(X)] = \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(X+j)$$

Et en particulier en remplaçant X par 0 :

$$\boxed{\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} P(j) = 0}$$

I.B.6) a) $u \circ \delta^2 = u \circ [u^2 \circ u^2] = u^5 = [u^2 \circ u^2] \circ u = \delta^2 \circ u$.

Donc

$$\boxed{u \text{ et } \delta^2 \text{ commutent}}$$

b) Soit $P \in \mathbb{R}_1[X] = \ker \delta^2$, alors

$$\delta^2(u(P)) = u(\delta^2(P)) = u(0) = 0$$

Donc $u(P) \in \ker(\delta^2) = \mathbb{R}_1[X]$.

Par conséquent

$$\boxed{\mathbb{R}_1[X] \text{ est stable par } u}$$

c) Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ vérifie $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, alors

$$\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix} = A \times A^2 = A^3 = A^2 \times A = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc $a = d$ et $c = 0$, ainsi $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, puis $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 2ab \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, et ainsi nécessairement $a = 0$, puis $2ab = 0$; ce qui est contradictoire avec $ab = 1$.

Donc

$$\boxed{\text{aucune matrice } A \text{ ne vérifie } A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

d) Puisque $\mathbb{R}_1[X]$ est stable par u , notons $\tilde{u} : \mathbb{R}_1[X] \rightarrow \mathbb{R}_1[X], P \mapsto u(P)$.

Considérons alors A , la matrice de \tilde{u} dans la base (P_1, P_2) de $\mathbb{R}_1[X]$.

Alors A^2 est égale à la matrice de la restriction de δ sur $\mathbb{R}_1[X]$ donc à $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, ceci est impossible. Donc

$$\boxed{\text{Il n'existe pas d'endomorphisme } u \text{ de } \mathbb{R}_n[X] \text{ tel que } u^2 = \delta}$$

I.B.7) a) On a vu (question I.B.3)) que pour $0 \leq i \leq d$, $\deg(\delta^i(P)) = \deg(P) - i = d - i$.

Ainsi, la famille $(\delta^d(P), \delta^{d-1}(P), \dots, P)$ est une famille de degrés échelonnés.

Alors la matrice de cette famille de vecteurs dans la base canonique de $\mathbb{R}_d[X]$ est triangulaire supérieure, à coefficients diagonaux non nuls, donc elle est inversible, ce qui prouve d'après le cours que $(\delta^d(P), \delta^{d-1}(P), \dots, P)$ est une base de $\mathbb{R}_d[X]$ (elle est libre et possède bien $d + 1$ vecteurs et $\mathbb{R}_d[X]$ est de dimension $d + 1$).

En conclusion, la famille $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ engendre $\mathbb{R}_d[X]$.

b) Soit V un sous-espace vectoriel non nul stable par δ .

$\{\deg(P) / P \in V \setminus \{0\}\}$ est non vide et majoré par n , donc il possède un maximum, que l'on notera d . Déjà, pour tout $P \in V$, $\deg(P) \leq d$, donc $V \subset \mathbb{R}_d[X]$.

De plus, il existe $P \in V \setminus \{0\}$ tel que $\deg(P) = d$. Alors, V étant stable par δ , $(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P))$ est une famille de vecteurs de V . On en déduit que $\text{Vect}(P, \delta(P), \dots, \delta^d(P)) \subset V$, donc $\mathbb{R}_d[X] \subset V$.

En conclusion, $V = \mathbb{R}_d[X]$.

II Applications en combinatoire

II.A - Quelques cas particuliers

II.A.1) Si φ est une surjection de E sur F , alors nécessairement $\#F \leq \#E$. Donc

$$\boxed{\text{si } n > p, \text{ alors } S(p, n) = 0}$$

II.A.2) Une surjection d'un ensemble de cardinal n sur un ensemble de cardinal n est en fait une bijection. Donc

$$\boxed{S(n, n) = n!}$$

II.A.3) Les surjections de \mathbb{N}_{n+1} sur $\llbracket 1, n \rrbracket$ sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de deux éléments de \mathbb{N}_{n+1} qui auront la même image : $\binom{n+1}{2}$ possibilités
- Puis, la distribution des n éléments de l'ensemble d'arrivée, avec les n éléments de l'ensemble de départ (un de ces éléments étant double) : $n!$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est le produit :

$$S(n+1, n) = \binom{n+1}{2} n! = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

II.B - Recherche d'une expression générale

II.B.1) Une application de $E = \mathbb{N}_p$ sur un ensemble $F = \llbracket 1, n \rrbracket$ est parfaitement définie -et de manière unique- par la donnée pour chacun des p éléments de E d'un unique élément de F . Ainsi,

$$\text{le nombre d'applications de } \mathbb{N}_p \text{ sur } \llbracket 1, n \rrbracket \text{ est } n \times n \cdots \times n = n^p$$

II.B.2) Notons $I_k = \{\varphi : \mathbb{N}_p \rightarrow \llbracket 1, n \rrbracket / \#\varphi(\mathbb{N}_p) = k\}$. Alors, d'après la question précédente :

$$n^p = \sum_{k=1}^n \#I_k$$

Il reste à dénombrer I_k . Or les applications φ de I_k sont parfaitement déterminées -et de manière unique- par :

- Le choix de k éléments de \mathbb{N}_n qui forment $\varphi(\mathbb{N}_p)$: $\binom{n}{k}$ possibilités
- Puis, le choix des surjections de \mathbb{N}_p sur l'ensemble $\varphi(\mathbb{N}_p)$ à k éléments : $S(p, k)$ possibilités

Le principe de décomposition permet alors d'affirmer que le cardinal recherché est

$$n^p = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} S(p, k) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} S(p, k)$$

avec la convention $S(p, 0) = 0$.

II.B.3) On applique alors la formule d'inversion trouvée en I.A.8), (p constant)

$$v_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u_k \iff u_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} v_k$$

avec $v_n = n^p$, $u_k = S(p, k)$, donc

$$\forall p \geq n, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.B.4) Pour $p < n$, le polynôme $P = X^p$ appartient à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après I.B.5),

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} P(k) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p = 0 = S(p, n)$$

On peut donc généraliser, de manière cohérente, la formule obtenue à la question précédente :

$$\forall p \in \mathbb{N}, S(p, n) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p$$

II.C) Avec les questions précédentes :

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^n = S(n, n) = n! \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^{n+1} = S(n+1, n) = \frac{n \times (n+1)!}{2}$$

III Etude d'une famille de polynômes

III.A - Généralités

III.A.1) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $\deg(H_k) = k$.

Donc la famille (H_0, H_1, \dots, H_n) est une famille de degrés échelonnés, donc (cf question I.B.7.a) elle est libre.

Elle est constituée de $n + 1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$ éléments de $\mathbb{R}_n[X]$. Donc

$$(H_0, H_1, \dots, H_n) \text{ est une base de } \mathbb{R}_n[X]$$

III.A.2) $\delta(H_0) = 1 - 1 = 0$.

Et pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \delta(H_k)(X) &= H_k(X+1) - H_k(X) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-1} (X+1-j) - \prod_{j=0}^{k-1} (X-j) \right) = \frac{1}{k!} \left((X+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) - (X-k+1) \prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \\ \delta(H_k) &= \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) ((X+1) - (X-k+1)) = \frac{1}{k!} \left(\prod_{j=0}^{k-2} (X-j) \right) \times k = H_{k-1} \end{aligned}$$

Bilan :

$$\delta(H_0) = 0 \text{ et pour tout } k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \delta(H_k) = H_{k-1}$$

III.A.3) Comme $\delta = \tau - \text{id}$, on a alors $\tau(H_0) = \delta(H_0) + H_0 = H_0$ et $\tau(H_k) = \delta(H_k) + H_k = H_k + H_{k-1}$.
Ainsi la matrice de τ dans la base (H_0, H_1, \dots, H_n) de \mathbb{R}_n est égale à

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

III.A.4) À partir de la question III.A.2, on en déduit par récurrence sur ℓ que, pour tout $\ell \in \mathbb{N}$,
si $k < \ell$ alors $\delta^\ell(H_k) = 0$ et si $k \geq \ell$ alors $\delta^\ell(H_k) = H_{k-\ell}$.

Soit k et ℓ tels que $0 \leq k, \ell \leq n$.

Si $k > \ell$, alors $\delta^k(H_\ell) = 0$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = 0$.

Si $k = \ell$, alors $\delta^\ell(H_\ell) = H_0$, donc $\delta^\ell(H_\ell)(0) = 1$.

Enfin, si $k < \ell$, alors $\delta^k(H_\ell) = H_{\ell-k}$, donc $\delta^k(H_\ell)(0) = H_{\ell-k}(0)$, car $\ell - k \geq 1$.

III.A.5) Puisque (H_k) est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$,

il existe $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $P = \sum_{\ell=0}^n a_\ell H_\ell$.

Puis, par linéarité :

$$\delta^k P(0) = \sum_{\ell=0}^n a_\ell \delta^k(H_\ell)(0) = a_k$$

Donc

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P = \sum_{k=0}^n \delta^k(P)(0) H_k$$

III.B - Étude d'un exemple

III.B.1) Notons $T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7$.

Il s'agit de calculer $\delta^k(T)(0)$, pour k de 0 à 3. Or

$$T(X) = X^3 + 2X^2 + 5X + 7, \delta(T)(X) = 3X^2 + 7X + 8, \delta^2(T)(X) = 6X + 10, \delta^3(T)(X) = 6$$

On a donc

$$T = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

III.B.2) Puisque $\delta^2(H_k) = H_{k-2}$, alors par linéarité :

$$\text{si } P = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0, \text{ on a } \delta^2(P) = 6H_3 + 10H_2 + 8H_1 + 7H_0$$

III.B.3) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n = P(n)$, où P est le polynôme de la question précédente.

Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k = P(k+2) - 2P(k+1) + P(k) = \delta^2(P)(k) = k^3 + 2k^2 + 5k + 7$, donc la suite (p_n) est une suite qui satisfait la relation de récurrence de l'énoncé.

Soit (u_n) une suite réelle, alors (u_n) satisfait la relation de récurrence si et seulement si la suite $v_n = u_n - p_n$ vérifie, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v_{k+2} - 2v_{k+1} + v_k = 0$. L'équation caractéristique associée à cette relation de récurrence linéaire d'ordre 2 est : $0 = r^2 - 2r + 1 = (r-1)^2$, donc (u_n) convient si et seulement si il existe $A, B \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = p_n + (A + Bn)1^n.$$

De plus, pour $k \geq h$, $H_h(k) = \frac{1}{h!}k(k-1)\dots(k-h+1) = \frac{1}{h!} \times \frac{k!}{(k-h)!} = \binom{k}{h}$, et pour $k < h$, $H_h(k) = 0$, donc (u_n) est solution du problème si et seulement si

$$\text{il existe } A, B \in \mathbb{R} \text{ tels que pour tout } k \in \mathbb{N}, u_k = A + Bk + 6\binom{k}{5} + 10\binom{k}{4} + 8\binom{k}{3} + 7\binom{k}{2}$$

avec convention : $\binom{k}{h} = 0$ si $h > k$

III.C - Polynômes à valeurs entières

III.C.1) Le calcul a été fait plus haut pour les nombres entiers naturels.

Si $k < 0$, en notant $p = -k$, on a :

$$H_n(k) = \frac{1}{n!}k(k-1)\dots(k-(n-1)) = \frac{1}{n!}(-p)(-p+1)\dots(-p+n-1) = \frac{1}{n!}(-1)^n \frac{(p+n-1)!}{(p-1)!} = (-1)^n \binom{p+n-1}{n}$$

Finalement

$$H_n(k) = \begin{cases} \binom{k}{n} & \text{si } k \geq n \\ 0 & \text{si } k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket \\ (-1)^n \binom{n-1-k}{n} & \text{si } k < 0 \end{cases}$$

III.C.2) Tous les coefficients binomiaux sont entiers (puisque'il s'agit d'un cardinal d'un ensemble), donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $H_n(k) \in \mathbb{Z}$.

$$H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$$

III.C.3) Pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\delta(P)(k) = P(k+1) - P(k)$$

Par soustraction de nombres entiers, il s'agit d'un nombre entier. Donc

$$\text{Si } P \text{ est à valeurs entières sur les entiers, alors il en est de même pour } \delta(P)$$

III.C.4) Si P est à valeurs entières sur les entiers,

alors par récurrence (sur $h \in \mathbb{N}$), pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\delta^h(P)(k) \in \mathbb{Z}$;

et donc en particulier $\delta^h(P)(0) \in \mathbb{Z}$, et les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers.

Réciproquement, si les coordonnées de P dans la base (H_k) sont des entiers,

alors $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$, puis $P(k) = \sum_{i=0}^d a_i H_i(k) \in \mathbb{Z}$ (combinaison linéaire d'entiers).

Bilan :

P est à valeurs entières sur les entiers si et seulement si ses coordonnées dans (H_k) sont entières

III.C.5) Supposons que P , de degré d , est à valeurs entières sur les entiers,

Alors d'après les questions précédentes, il existe $a_0, a_1 \dots a_d \in \mathbb{Z}$ tels que $P = \sum_{i=0}^d a_i H_i$.

Et donc

$$d!P = \sum_{i=0}^d a_i \times d!H_i = \sum_{i=0}^d \left(a_i \times d(d-1)\dots(i+1) \times \prod_{j=0}^{i-1} (X-j) \right)$$

Ainsi, $d!P$ est bien un polynôme à coefficients entiers.

Comme le montre le polynôme $P = \frac{1}{2}X^2$, de degré 2 :
on a $2!P$ à coefficients entiers, mais $P(1) = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$.

La réciproque est donc fausse.

IV Généralisation de l'opérateur de différence et application

IV.A -

IV.A.1) $x \mapsto x+1$ est C^∞ de \mathbb{R}_+^* à valeurs dans \mathbb{R}_+^* .

Par composition, $x \mapsto f(x+1)$ est C^∞ sur \mathbb{R}_+^* . Puis par addition

$\delta(f)$ est de classe C^∞ sur \mathbb{R}_+^*

Puis pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$,

$$\delta(f')(x) = f'(x+1) - f'(x) \text{ et } (\delta(f))'(x) = f'(x+1) - f'(x)$$

Donc

$$\delta(f') = (\delta(f))'$$

IV.A.2) Même démonstration qu'en I.B.4),

$$\forall n \in \mathbb{N}, (\delta^n(f))(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(x+k)$$

IV.A.3) Soit $x > 0$.

Appliquons le théorème des accroissements finis à f , de classe C^1 sur $[x, x+1]$,

$$\exists c \in]x, x+1[\text{ tel que } \delta(f)(x) = f(x+1) - f(x) = f'(c) \times (x+1-x) = f'(c)$$

En faisant le changement de variable $y_1 = c - x$,

pour tout $x > 0$, il existe $y_1 \in]0, 1[$ tel que $\delta(f)(x) = f(x+y_1)$

IV.A.4) Nous allons procéder par récurrence. Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

\mathcal{P}_n : « $\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \exists y_n \in]0, n[$ tel que $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$ »

— D'après la question IV.A.3), \mathcal{P}_1 est vraie.

— Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que \mathcal{P}_n est vraie.

Soit $x > 0$ et soit f une application de classe \mathcal{C}^∞ de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} . On peut appliquer \mathcal{P}_n à $\delta(f)$, qui est bien de classe \mathcal{C}^∞ , donc il existe $y_n \in]0, n[$ tel que :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \delta^n(\delta f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n)$$

Puis par commutation des opérateurs différence et dérivation :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = (\delta f)^{(n)}(x+y_n) = \delta(f^{(n)})(x+y_n) = f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n)$$

On applique l'égalité des accroissements finis à $f^{(n)}$: il existe $c \in]x+y_n, x+y_n+1[$ tel que

$$f^{(n)}(x+y_n+1) - f^{(n)}(x+y_n) = (f^{(n)})'(c) \times ((x+y_n+1) - (x+y_n)) = f^{(n+1)}(c)$$

Enfin, d'après IV.A.2) :

$$\delta^{n+1}(f)(x) = \sum_{j=0}^{n+1} (-1)^{n+1-j} \binom{n+1}{j} f(x+j) = f^{(n+1)}(c)$$

En prenant $y_{n+1} = c - x$, alors $y_{n+1} > x + y_n - x \geq y_n \geq 0$ et $y_{n+1} < x + y_n + 1 - x \leq y_n + 1 \leq n + 1$.

Ainsi, on a donc \mathcal{P}_{n+1} qui est vérifiée.

Par conséquent,

$$\forall x > 0, \forall f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+^*), \forall n \in \mathbb{N}, \exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(x+j) = f^{(n)}(x+y_n)$$

IV.B -

IV.B.1) Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

Il existe p_1, \dots, p_i , i nombres premiers et $a_1, a_2, \dots, a_i \in \mathbb{N}$ tel que $k = \prod_{j=1}^i p_j^{a_j}$.

On a alors

$$k^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^{a_j})^\alpha = \prod_{j=1}^i (p_j^\alpha)^{a_j}$$

Il s'agit de produit de nombres entiers naturels non nuls, donc

$$k^\alpha \text{ est un nombre entier naturel}$$

IV.B.2) Si $\alpha < 0$, alors

$$2^\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\alpha} < 1$$

Or on a vu que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $k^\alpha \in \mathbb{N}^*$, donc $k^\alpha \geq 1$. On a une contradiction,

$$\alpha \in \mathbb{R}_+$$

IV.B.3) Si α est un entier naturel, alors $f_\alpha^{(\alpha)} = \alpha!$ et donc $f_\alpha^{(\alpha+1)} = 0$;

donc l'une au moins des dérivées de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif.

Réciproquement, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$;
 or on sait que pour tout réel x ,

$$f_\alpha^{(n)}(x) = \alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}$$

Donc si $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$, alors comme $x_0 > 0$, on a nécessairement : $\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - n + 1) = 0$;
 et donc il existe $k \in \llbracket 0, n - 1 \rrbracket$ tel que $\alpha - k = 0$ donc $\alpha = k \in \mathbb{N}$. Ainsi :

$\alpha \in \mathbb{N}$ si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}$ et $x_0 > 0$ tels que $f_\alpha^{(n)}(x_0) = 0$

IV.C -

IV.C.1) D'après IV.B.1), pour tout k entier, $k^\alpha \in \mathbb{N}$,
 donc pour tout $j \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f_\alpha(x + j) \in \mathbb{N}$ puisque x entier.
 Puis par stabilité par multiplications et additions d'entiers :

$\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) \in \mathbb{Z}$

IV.C.2) On applique directement la relation (IV.1.) :

$$\exists y_n \in]0, n[\text{ tel que } \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) = f_\alpha^{(n)}(x + y_n) = \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)}{(x + y_n)^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}}$$

Donc comme $y_n \geq 0$,

$$0 \leq \sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) \leq \frac{\alpha(\alpha - 1)\dots(\alpha - \lfloor \alpha \rfloor)}{x^{\lfloor \alpha \rfloor + 1 - \alpha}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$$

IV.C.3) Comme cette limite pour $x \rightarrow +\infty$ est nulle, on peut prendre $\epsilon = \frac{1}{2}$; il existe $A > 0$ tel

que pour tout $x \geq A$: $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) \in]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$.

Or, lorsque $x \in \mathbb{N}^*$, cette somme est entière, donc elle est nécessairement nulle.

Ainsi, pour tout $x \geq A$ avec $x \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{j=0}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f_\alpha(x + j) = 0 = f_\alpha^{(n)}(x + y_n)$.

Donc, une dérivée de f_α s'annule en au moins un réel strictement positif. D'après IV.B.3),

α est donc un entier naturel
