DM 36 : énoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni le jeudi 16 mai.

Dans tout ce problème, $\mathbb{K}$ désigne un corps et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, égale à $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{K}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Partie I : polynôme minimal

1°) Soit I un idéal non nul de $\mathbb{K}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme P dont le coefficient dominant est égal à 1 et tel que I est l'ensemble des multiples de P.

Lorsque $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in L(E)$, on note $P(u) = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n u^n$.
En particulier, avec $P = 1 = X^0$, $P(u) = u^0 = Id_E$.

2°) Soit $u \in L(E)$. Montrer que l'application $\begin{array}{cccc} \varphi_u : & \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & L(E) \\ & P & \longmapsto & P(u) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres.

3°) Soit $u \in L(E)$. Montrer que la famille $(Id_E, u, u^2, \ldots, u^{n^2})$ est liée.
En déduire qu'il existe un unique polynôme π_u dans $\mathbb{K}[X]$, de coefficient dominant égal à 1, tel que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(u) = 0 \Longleftrightarrow \pi_u \mid P$.
On dira que π_u est le polynôme minimal de u.

4°) Déterminer les endomorphismes u de E tels que $\deg(\pi_u) = 0$, puis tels que $\deg(\pi_u) = 1$.

5°) On suppose pour cette question que $E = \mathbb{K}^2$ et que u est l'endomorphisme canoniquement associé à une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.
Montrer que $M^2 - \mathrm{Tr}(M)M + \det(M)I_2 = 0$. En déduire le polynôme minimal de u.

6°) Pour cette question, on suppose que $n = 4$, que $e = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ est une base de E et que f est un endomorphisme de E dont la matrice dans la base est e est égale à

$$M = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ -a_1 & a_0 & -a_3 & a_2 \\ -a_2 & a_3 & a_0 & -a_1 \\ -a_3 & -a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme minimal de f.

Partie II : ordre d'un vecteur

Pour toute la suite du problème, on fixe $f \in L(E)$.
Lorsque $P \in \mathbb{K}[X]$ et $u \in E$, on notera $P(f)(u)$ la valeur prise en u par l'endomorphisme $P(f)$.

7°) Soit $u \in E$.
Montrer qu'il existe un unique polynôme P_u, de coefficient dominant égal à 1, tel que pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$, $P(f)(u) = 0 \Longleftrightarrow P_u \mid P$.
On dira que P_u est l'ordre de u (relatif à f).

8°) Pour cette seule question, $E = \mathbb{Q}^4$ et f est l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

On note $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)$ la base canonique de $\mathbb{Q}^4$.
Montrer que $(c_3, f(c_3), f^2(c_3), f^3(c_3))$ est une base de $\mathbb{Q}^4$.
Calculer P_{c_3}.

9°) Montrer que π_f est un multiple de P_u.

On note S l'espace vectoriel engendré par la famille $(f^i(u))_{i \in \mathbb{N}}$.

10°) Montrer que $S = \{P(f)(u) \ / \ P \in \mathbb{K}[X]\}$. En déduire que $f(S) \subset S$.

11°) Montrer que $\dim(S) = \deg(P_u)$.

12°) On note g l'endomorphisme induit par f sur S : Montrer que $\pi_g = P_u$.

Partie III : familles f-génératrices

On dira qu'une famille $(e_1, \ldots, e_k)$ de vecteurs de E est f-génératrice si et seulement si pour tout $x \in E$, il existe des polynômes $Q_1, \ldots, Q_k$ dans $\mathbb{K}[X]$ tels que $x = \sum_{i=1}^{k} Q_i(f)(e_i)$.

13°) Pour cette seule question, reprenons l'exemple de la question 8 : montrer que (c_3) est f-génératrice, où (c_3) désigne la famille constituée par le seul vecteur c_3.

14°) Montrer que E possède toujours au moins une famille f-génératrice de vecteurs.

15°) Soit $(e_1, e_2, \ldots, e_k)$ une famille f-génératrice de E.
Montrer que le polynôme minimal de f est égal au PPCM des ordres de $e_1, \ldots, e_k$, c'est-à-dire des polynômes $P_{e_1}, \ldots, P_{e_k}$.

Partie IV : le polynôme minimal est l'ordre d'un vecteur

Soient $y_1, y_2, \ldots, y_k$ des vecteurs de E, dont les ordres relatifs à f, c'est-à-dire les polynômes $P_{y_1}, \ldots, P_{y_k}$, sont deux à deux premiers entre eux.
On pose $y = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$.

16°) Montrer que, pour tout $i \in \mathbb{N}_k, P_{y_i}$ divise $P_y \prod_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} P_{y_j}$.

17°) Montrer que $P_y = \prod_{i=1}^{k} P_{y_i}$.

On admettra le théorème de décomposition des noyaux : si $Q_1, \ldots, Q_n$ sont n polynômes de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux, alors $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(Q_i(f)) = \mathrm{Ker}\Big(\Big[\prod_{i=1}^{n} Q_i\Big](f)\Big)$.

Notons $\pi_f = \prod_{i=1}^{k} P_i^{\alpha_i}$ la décomposition de π_f en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$.
Pour tout $i \in \mathbb{N}_k$, appelons F_i le noyau de $P_i^{\alpha_i}(f)$.

18°) Soit $i \in \mathbb{N}_k$. Notons $e = (e_1, \ldots, e_r)$ une base de F_i.
Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}_r$, il existe $\beta_j \in \mathbb{N}$ tel que $P_{e_j} = P_i^{\beta_j}$.
Notons $\beta = \max_{1 \le j \le r} \beta_j$: Montrer que $\Big(P_i^{\beta} \prod_{\substack{1 \le j \le k \\ j \ne i}} P_j^{\alpha_j}\Big)(f) = 0$.

19°) Montrer qu'il existe $y \in E$ tel que $\pi_f = P_y$

Partie V : Endomorphismes cycliques

On dira que f est cyclique si et seulement si il existe $u \in E$ tel que la famille $(u, f(u), \ldots, f^{n-1}(u))$ est une base de E. Dans ce cas, on dira que u est un f-générateur de E.

20°) Lorsque f est l'endomorphisme de la question 8, f est-il cyclique ?

21°) On suppose que f est cyclique.
Montrer que $\{g \in L(E) \ / \ f \circ g = g \circ f\} = \{Q(f) \ / \ Q \in \mathbb{K}[X]\}$.

22°) Montrer que f est cyclique si et seulement si π_f est de degré n.

Pour la fin de ce problème, on suppose que f est cyclique et que $\pi_f = \prod_{i=1}^{t} P_i$, où les polynômes $P_1, \ldots, P_t$ sont deux à deux premiers entre eux.

23°) Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, montrer que $\mathrm{Ker}(P_i(f))$ est stable par f (c'est-à-dire que $f(\mathrm{Ker}(P_i(f))) \subset \mathrm{Ker}(P_i(f))$).
On note f_i l'endomorphisme induit par f sur $\mathrm{Ker}(P_i(f))$.
Montrer que $\mathrm{Ker}(P_i(f)) = \mathrm{Ker}(\pi_{f_i}(f))$.
En déduire que $\pi_{f_i} = P_i$.

24°) Pour tout $i \in \{1, \dots, t\}$, montrer que f_i est cyclique.