Feuille d'exercices 22.
Corrigé de 2 exercices

Exercice 22.21 :

Appliquons la formule du rang à $h|_{\mathrm{Im}(g\circ f)}$: on obtient que
$\dim(\mathrm{Im}(g\circ f)) = \dim(\mathrm{Im}(h|_{\mathrm{Im}(g\circ f)})) + \dim(\mathrm{Ker}(h|_{\mathrm{Im}(g\circ f)}))$, or
$\mathrm{Im}(h|_{\mathrm{Im}(g\circ f)}) = \{h((g\circ f)(x)) \ / \ x \in E\} = \mathrm{Im}(hgf)$ et
$\mathrm{Ker}(h|_{\mathrm{Im}(g\circ f)}) = \mathrm{Ker}(h) \cap \mathrm{Im}(g\circ f)$, donc $\mathrm{rg}(gf) - \mathrm{rg}(hgf) = \dim(\mathrm{Ker}(h)\cap \mathrm{Im}(g\circ f))$.
De même, en appliquant la formule du rang à $h|_{\mathrm{Im}(g)}$,
on obtient que $\mathrm{rg}(g) - \mathrm{rg}(hg) = \dim(\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{Im}(g))$.
Il suffit donc de démontrer que $\dim(\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{Im}(g\circ f)) \leq \dim(\mathrm{Ker}(h)\cap\mathrm{Im}(g))$, ce qui est évident car $\mathrm{Im}(g\circ f)\subset \mathrm{Im}(g)$.

Exercice 22.24 :

1°)

◇ Supposons que A est monotone.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \geq 0$. En notant $X_{i,1}$ le i-ème coefficient du vecteur colonne X, on a $X_{i,1} = [A^{-1}AX]_{i,1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n}[A^{-1}]_{i,j}[AX]_{j,1}$, donc $X_{i,1} \geq 0$, car A^{-1} est positive et car AX est positif. Ainsi $X \geq 0$.
◇ Réciproquement, supposons que pour tout $X \in \mathbb{R}^n$, si AX est positif, alors X est aussi positif.
Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX = 0$. Alors $AX \geq 0$ et $A(-X) \geq 0$, donc $X \geq 0$ et $-X \geq 0$, ce qui implique $X = 0$. Ceci prouve que A est inversible.
Soit $j \in \{1,\ldots,n\}$: Posons $Y = (\delta_{i,j})_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{R}^n$. Alors $A^{-1}Y$ est égal à la j-ème colonne de A^{-1}. Or $Y \geq 0$ et $Y = A(A^{-1}Y)$, donc d'après l'hypothèse, $A^{-1}Y \geq 0$. On a montré que toutes les colonnes de A^{-1} sont positives, donc A^{-1} est bien une matrice positive.

2°) Supposons par l'absurde que A n'est pas une matrice monotone. D'après la première question, il existe $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $AX \geq 0$ avec X non positive. Posons $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ et convenons que $x_0 = x_{n+1} = 0$. Ainsi, le i-ème coefficient de AX vaut $-x_{i-1} + (2+a_i)x_i - x_{i+1}$. Il est positif par hypothèse alors qu'il existe $i_0 \in \{1,\ldots,n\}$ tel que $x_{i_0} = \min\limits_{1\leq i\leq n} x_i < 0$.

On a $-x_{i_0-1}+(2+a_{i_0})x_{i_0}-x_{i_0+1} \geq 0$, donc $-x_{i_0-1}-x_{i_0+1} \geq (2+a_{i_0})(-x_{i_0}) \geq 2(-x_{i_0})$, car $-x_{i_0} > 0$ et $a_{i_0} \geq 0$, mais par définition de i_0, on a $x_{i_0-1} + x_{i_0+1} \geq 2x_{i_0}$, donc $x_{i_0-1} + x_{i_0+1} = 2x_{i_0}$, c'est-à-dire : $(x_{i_0-1} - x_{i_0}) + (x_{i_0+1} - x_{i_0}) = 0$. Or $x_{i_0-1} - x_{i_0}$ et $x_{i_0+1} - x_{i_0}$ sont positifs, donc ils sont tous deux nuls. Ainsi, $x_{i_0-1} = x_{i_0} = x_{i_0+1}$.
On a donc montré que si le minimum de $\{x_i/1 \leq i \leq n\}$ est atteint en i_0, il est aussi atteint en $i_0 - 1$. Par récurrence, on en déduit que ce minimum est atteint en x_0, ce qui est faux car $x_0 = 0$.
Ainsi A est monotone.