

DS 9

Les calculatrices sont interdites.

Partie I : Polynômes de Tchebychev

On admettra que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$.

Les T_n sont les polynômes de Tchebychev de première espèce.

1°) Déterminer T_0, T_1, T_2 et T_3 .

2°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.

3°) Montrer que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

4°) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, déterminer le degré et le coefficient dominant de T_n .

5°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de T_n .

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \frac{1}{n+1} T'_{n+1}$.

Les U_n sont les polynômes de Tchebychev de seconde espèce.

6°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $U_n(\cos \theta) = \frac{\sin((n+1)\theta)}{\sin \theta}$.

7°) Montrer que la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la même relation de récurrence que la suite $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$, énoncée en question 3.

8°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, déterminer les racines de U_n .

Partie II : Arithmétique des polynômes de Tchebychev

9°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$.

Lorsque $0 \leq m \leq n$, montrer que $T_m T_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m})$.

Lorsque $0 \leq m < n$, montrer que $T_m U_{n-1} = \frac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1})$.

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$, on note $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ les quotient et reste de la division euclidienne de T_n par T_m .

10°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $m < n < 3m$.

Montrer que $Q_{n,m} = 2T_{n-m}$ et $R_{n,m} = -T_{|n-2m|}$.

11°) Déterminer $Q_{n,m}$ et $R_{n,m}$ lorsque n est de la forme $(2p+1)m$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

12°) Soit $n, m \in \mathbb{N}$ avec $0 < m \leq n$.

On suppose que n n'est pas le produit de m par un entier impair.

Montrer qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|n - 2pm| < m$ et que

$$Q_{n,m} = 2(T_{n-m} - T_{n-3m} + \cdots + (-1)^{p-1}T_{n-(2p-1)m}) \text{ et } R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}.$$

Pour la suite de cette partie, on fixe deux entiers naturels n et m , non tous deux nuls.

13°) On note h le pgcd des entiers $m + 1$ et $n + 1$.

Montrer que U_{h-1} est un pgcd de U_n et U_m .

On note g le pgcd de n et de m . On pose $m_1 = \frac{m}{g}$ et $n_1 = \frac{n}{g}$.

14°) Montrer que si m_1 et n_1 sont impairs, alors T_g est un pgcd de T_n et T_m .

Que se passe-t-il lorsque m_1 ou n_1 est pair ?

Partie III : Théorème de Block et Thielmann

Lorsque P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, on dit que P et Q commutent si et seulement si $P \circ Q = Q \circ P$.

Lorsque $P \in \mathbb{C}[X]$, on note $\mathcal{C}(P)$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ qui commutent avec P .

On cherche dans cette partie les familles $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[X]$ vérifiant la propriété \mathcal{P} suivante :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(F_n) = n$ et pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $F_n \circ F_m = F_m \circ F_n$.

On note G l'ensemble des polynômes de $\mathbb{C}[X]$ de degré 1.

Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on note $P_\alpha = X^2 + \alpha$.

15°) Montrer que les familles $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifient la condition \mathcal{P} .

16°) Montrer que G est un groupe pour la loi de composition \circ .

L'inverse pour la loi \circ d'un élément U de G sera noté U^{-1} .

17°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit Q un polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ qui commute avec P_α .

Montrer que Q est unitaire.

18°) Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α .

Déterminer $\mathcal{C}(X^2)$.

19°) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré 2.

Justifier l'existence et l'unicité de $U \in G$ et de $\alpha \in \mathbb{C}$ tels que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$.

Déterminer U et α lorsque $P = T_2$.

20°) Montrer que $\mathcal{C}(T_2) = \{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n / n \in \mathbb{N}\}$.

21°) Montrer que les seuls complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3 sont 0 et -2 .

22°) En déduire le théorème de Block et Thielmann :

si $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie la propriété \mathcal{P} , alors il existe $U \in G$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = U^{-1} \circ X^n \circ U \text{ ou } \forall n \in \mathbb{N}^*, F_n = U^{-1} \circ T_n \circ U.$$