DS 9 : un corrigé

Il s'agit du sujet Centrale 2014 MP, légèrement adapté et privé de sa dernière partie.

Le barème comporte un total de 60 points.

Partie I : Polynômes de Tchebychev (sur 16 points)

1°) (sur 2 points) Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $1(\cos\theta) = 1 = \cos(0.\theta)$, $X(\cos\theta) = \cos\theta$ et $(2X^2 - 1)(\cos\theta) = \cos 2\theta$, donc d'après l'unicité signalée par l'énoncé,
$\boxed{T_0 = 1,\ T_1 = X \text{ et } T_2 = 2X^2 - 1}$.
De plus $\cos(3\theta) + \cos\theta = \cos(2\theta + \theta) + \cos(2\theta - \theta) = 2\cos 2\theta \cos\theta$,
donc $T_3 = 2(2X^2 - 1)X - X$. Ainsi, $\boxed{T_3 = 4X^3 - 3X}$.

2°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$\cos(n\theta) = \mathrm{Re}((e^{i\theta})^n)$, or d'après la formule du binôme de Newton,

$$\begin{aligned}(e^{i\theta})^n &= (\cos\theta + i\sin\theta)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\cos\theta)^{n-k}(i\sin\theta)^k \\ &= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (i\sin\theta)^{2k}(\cos\theta)^{n-2k} + \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} \binom{n}{2k+1} (i\sin\theta)^{2k+1}(\cos\theta)^{n-2k-1},\end{aligned}$$

donc en passant aux parties réelles,

$$\cos n\theta = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (sin^2\theta)^k (\cos\theta)^{n-2k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k (1 - \cos^2\theta)^k (\cos\theta)^{n-2k}.$$

Ainsi, par unicité, on obtient bien que $T_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} (X^2 - 1)^k X^{n-2k}$.

3°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$,
$\cos(n+2)\theta + \cos(n\theta) = \cos((n+1)+1)\theta + \cos((n+1)-1)\theta = 2\cos((n+1)\theta)\cos\theta$,
donc $\cos\theta$ est une racine du polynôme $T_{n+2} + T_n - 2XT_{n+1}$. Ainsi, ce polynôme est nul car il possède une infinité de racines. Ceci démontre que $T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n$.

4°) (sur 2 points)
Si P est un polynôme non nul, notons $\mathrm{dom}(P)$ le coefficient dominant de P.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On va démontrer par récurrence double la propriété suivante, notée $R(n)$:

$\deg(T_n) = n$ et $\mathrm{dom}(T_n) = \begin{cases} 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1 \\ 1 \text{ si } n = 0 \end{cases}$.

$T_0 = 1$ et $T_1 = X$, donc $R(0)$ et $R(1)$ sont vraies.

Supposons que $n \geq 0$ et que $R(n)$ et $R(n+1)$ sont vraies. Montrons $R(n+2)$.

Alors $\deg(2XT_{n+1}) = n+2$ et $\deg(T_n) = n$, donc d'après le cours et la relation de la question précédente, $\deg(T_{n+2}) = \max(\deg(2XT_{n+1}), \deg(T_n))$, car ces deux derniers degrés sont différents. Ainsi, $\deg(T_{n+2}) = n+2$. De plus, toujours d'après la relation de la question précédente, $\mathrm{dom}(T_{n+2}) = 2\mathrm{dom}(T_{n+1}) = 2^{n+1}$, car $n+1 \geq 1$.

Ceci prouve $R(n+2)$. On conclut d'après le principe de récurrence.

5°) (sur 3 points)

Lorsque $P \in \mathbb{R}[X]$, on notera $\mathrm{Rac}(P)$ l'ensemble des racines réelles de P.

Lorsque $n = 0$, $\boxed{\mathrm{Rac}(T_0) = \emptyset}$. Supposons maintenant que $n \geq 1$.

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. $\cos(n\theta) = 0 \Longleftrightarrow n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \Longleftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z},\ \theta = \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}$.

En particulier, ceci montre que $\left\{ \cos\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \ / \ 0 \leq k \leq n-1 \right\} \subset \mathrm{Rac}(T_n)$.

Lorsque $0 \leq k \leq n-1$, $0 < \dfrac{\pi + 2k\pi}{2n} \leq \dfrac{(2n-1)\pi}{2n} < \pi$,

or l'application cos est injective sur $[0, \pi]$, donc lorsque $h, k \in \{0, \ldots, n-1\}$, avec $h \neq k$, on a $\cos\left(\dfrac{\pi + 2k\pi}{2n}\right) \neq \cos\left(\dfrac{\pi + 2h\pi}{2n}\right)$. On a ainsi déjà trouvé n racines distinctes de T_n, or $\deg(T_n) = n$, donc T_n possède au plus n racines.

On a ainsi montré que $\boxed{\mathrm{Rac}(T_n) = \left\{ \cos\left(\dfrac{2k+1}{2n}\pi\right) \ / \ 0 \leq k \leq n-1 \right\}}$.

6°) (sur 2 points)

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. En dérivant la relation $T_{n+1}(\cos\theta) = \cos((n+1)\theta)$, on obtient que $-\sin\theta T'_{n+1}(\cos\theta) = -(n+1)\sin((n+1)\theta)$, or $\sin\theta \neq 0$ car $\theta \notin \pi\mathbb{Z}$, donc $\dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin\theta} = \dfrac{1}{n+1} T'_{n+1}(\cos\theta) = U_n(\cos\theta)$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

$\sin((n+3)\theta) + \sin((n+1)\theta) = \sin(((n+2)+1)\theta) + \sin(((n+2)-1)\theta) = 2\sin((n+2)\theta)\cos\theta$, donc en divisant par $\sin\theta \neq 0$, $U_{n+2}(\cos\theta) + U_n(\cos\theta) = 2\cos\theta U_{n+1}(\cos\theta)$. Ainsi, le polynôme $U_{n+2} + U_n - 2XU_{n+1}$ possède une infinité de racines, donc il est nul.

Ceci démontre que $U_{n+2} = 2XU_{n+1} - U_n$.

8°) (sur 2 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.

$\sin((n+1)\theta) = 0 \Longleftrightarrow (n+1)\theta \equiv 0\ [\pi]$, donc $\left\{ \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \ / \ 1 \leq k \leq n \right\} \subset \mathrm{Rac}(U_n)$, or $\deg(U_n) = \deg(T_{n+1}) - 1 = n$, donc pour les mêmes raisons qu'en question 5, $\boxed{\mathrm{Rac}(U_n) = \left\{ \cos\left(\dfrac{k\pi}{n+1}\right) \ / \ 1 \leq k \leq n \right\}}$.

Partie II : Arithmétique des polynômes de Tchebychev (sur 19 points)

9°) (sur 2 points)
$\diamond$ Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq m \leq n$. Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
$\cos(n\theta+m\theta)+\cos(n\theta-m\theta) = 2\cos(n\theta)\cos(m\theta)$, donc le polynôme $T_{n+m}+T_{n-m}-2T_nT_m$ admet $\cos\theta$ pour racine. Ce polynôme possède donc une infinité de racines, donc il est nul (on appellera pour la suite cet argument le principe de rigidité des polynômes). Ainsi, $T_mT_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{n-m})$.
$\diamond$ Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq m < n$. Alors $n - m - 1 \in \mathbb{N}$. Soit $\theta \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
$\sin((n + m)\theta) + \sin((n - m)\theta) = 2\cos(m\theta)\sin(n\theta)$, donc
$(\sin\theta)U_{n+m-1}(\cos\theta) + (\sin\theta)U_{n-m-1}(\cos\theta) = 2T_m(\cos\theta)(\sin\theta)U_{n-1}(\cos\theta)$, donc , en simplifiant par $\sin\theta$ qui est non nul, puis en utilisant le principe de rigidité des polynômes, on obtient bien que $T_mU_{n-1} = \frac{1}{2}(U_{n+m-1} + U_{n-m-1})$.

10°) (sur 2 points) En reprenant le premier calcul de la question précédente, par parité de l'application cos, on voit que, pour tout $n, m \in \mathbb{N}$, $T_mT_n = \frac{1}{2}(T_{n+m} + T_{|n-m|})$. Soit maintenant $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m < n < 3m$. En appliquant ce qui précède en remplaçant le couple (n, m) par le couple $(n - m, m)$ (on a bien $n - m \in \mathbb{N}$), on obtient que (1) : $T_n = T_{(n-m)+m} = 2T_mT_{n-m} - T_{|n-2m|}$. Or $\deg(T_{|n-2m|}) = |n - 2m| < m$, car $n \in]m, 3m[= \{x \in \mathbb{R} \ / \ d(x, 2m) < m\}$ (où d désigne la distance usuelle dans $\mathbb{R}$). Ainsi, $\deg(T_{|n-2m|}) < \deg(T_m)$, donc l'égalité (1) est la division euclidienne de T_n par T_m, ce qu'il fallait démontrer.

11°) (sur 2 points) Lors de la question précédente, pour montrer la relation (1), on a seulement eu besoin de supposer que $n, m \in \mathbb{N}$ avec $m \leq n$.
Supposons maintenant que $n = m(2p + 1)$ avec $p \in \mathbb{N}$.
Alors $m \leq n$ et la relation (1) devient : $T_{m(2p+1)} = 2T_mT_{2pm} - T_{m(2p-1)}$.
Par récurrence sur p, on en déduit que, pour tout $p \in \mathbb{N}$ (on accepte la valeur $p = 0$, pour initialiser la récurrence), $T_{m(2p+1)} = 2T_m \sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}T_{2km} + (-1)^pT_m$.

On en déduit que $\boxed{Q_{n,m} = (-1)^p + 2\sum_{k=1}^{p}(-1)^{p-k}T_{2km} \text{ et } R_{n,m} = 0}$.

12°) $\diamond$ (sur 1 point) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Alors
$|n - 2pm| < m \iff 2pm - m < n < 2pm + m \iff 2p - 1 < \frac{n}{m} < 2p + 1$, donc
$|n - 2pm| < m \iff p - 1 < \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1) < p$. Posons $x = \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1)$ (m est supposé non nul). $0 < m \leq n$, donc $x \geq 0$ et $x \notin \mathbb{N}$ car $\frac{n}{m}$ n'est pas un entier impair. Ainsi, $|n - 2pm| < m \iff p = 1 + \lfloor x \rfloor$. Ceci prouve qu'il existe un unique $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $|n - 2pm| < m$, et que $p = 1 + \lfloor \frac{1}{2}(\frac{n}{m} - 1) \rfloor$.
$\diamond$ (sur 3 points) Par récurrence sur $k \in \{0, \ldots, p - 1\}$, en adaptant la question précédente, on montre que $R(k)$: $T_n = 2T_m \sum_{h=0}^{k-1}(-1)^hT_{n-(2h+1)m} + (-1)^kT_{n-2km}$.

En effet, $R(0)$ est évidente, et si $R(k)$ est vraie avec $0 \leq k < p-1$, alors d'après la relation (1), $T_{n-2km} = 2T_m T_{n-(2k+1)m} - T_{n-2(k+1)m}$ (on a bien $n - 2(k+1)m \geq 0$ car $k+1 < p$), l'hypothèse de récurrence donne

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_m \sum_{h=0}^{k-1} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^k (2T_m T_{n-(2k+1)m} - T_{n-2(k+1)m}) \\ &= 2T_m \sum_{h=0}^{k} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{k+1} T_{n-2(k+1)m}. \end{aligned}$$

En particulier, $R(p-1)$ suivi d'une nouvelle utilisation de (1) donne :

$$\begin{aligned} T_n &= 2T_m \sum_{h=0}^{p-2} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{p-1} T_{n-2(p-1)m} \\ &= 2T_m \sum_{h=0}^{p-2} (-1)^h T_{n-(2h+1)m} + (-1)^{p-1} (2T_m T_{n-(2p-1)m} - T_{|n-2pm|}), \end{aligned}$$

Or $\deg(T_{|n-2pm|} = |n-2pm| < m$, donc l'égalité précédente est la division euclidienne de T_n par T_m.

On a ainsi montré que $Q_{n,m} = 2 \sum_{h=0}^{p-1} (-1)^h T_{n-(2h+1)m}$ et que $R_{n,m} = (-1)^p T_{|n-2pm|}$.

13°) (sur 5 points)

◇ D'après la question 8, les décompositions en produit de polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ de U_n et U_m sont $U_n = \mathrm{dom}(U_n) \prod_{x \in \mathrm{Rac}(U_n)} (X - x)$

et $U_m = \mathrm{dom}(U_n) \prod_{x \in \mathrm{Rac}(U_m)} (X - x)$, donc d'après le cours, un pgcd de U_n et U_m est égal

à $\mathrm{dom}(U_{h-1}) \prod_{x \in \mathrm{Rac}(U_n) \cap \mathrm{Rac}(U_m)} (X - x)$. Le polynôme U_{h-1} étant scindé, il suffit donc de

montrer que $\mathrm{Rac}(U_{h-1}) = \mathrm{Rac}(U_n) \cap \mathrm{Rac}(U_m)$.

◇ Soit $x \in \mathrm{Rac}(U_{h-1})$. D'après la question 8, il existe $j \in \mathbb{N}_{h-1}$ tel que $x = \cos\left(\frac{j\pi}{h}\right)$.

Or h divise $n+1$, donc il existe $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $n+1 = dh$. alors $x = \cos\left(\frac{jd\pi}{n+1}\right)$ et $1 \leq jd < dh = n+1$, donc $x \in \mathrm{Rac}(U_n)$. De même, on montre que $x \in \mathrm{Rac}(U_m)$.

Ainsi, $\mathrm{Rac}(U_{h-1}) \subset \mathrm{Rac}(U_n) \cap \mathrm{Rac}(U_m)$.

◇ Soit $x \in \mathrm{Rac}(U_n) \cap \mathrm{Rac}(U_m)$. Il existe $k \in \mathbb{N}_n$ et $k' \in \mathbb{N}_m$ tels que $x = \cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right) = \cos\left(\frac{k'\pi}{m+1}\right)$. Par injectivité de cos sur $[0, \pi]$, $\frac{k}{n+1} = \frac{k'}{m+1}$.

D'après le cours, il existe $d, d' \in \mathbb{N}^*$ tels que $n+1 = hd$, $m+1 = hd'$ avec d et d' premiers entre eux. On a $\frac{k'}{k} = \frac{m+1}{n+1} = \frac{d'}{d}$, donc $k'd = d'k$. Ainsi, d divise $d'k$, puis d'après le lemme de Gauss, d divise k : il existe $k'' \in \mathbb{N}^*$ tel que $k = dk''$. Alors $x = \cos\left(\frac{k''\pi}{h}\right) \in \mathrm{Rac}(U_{h-1})$, car $1 \leq k = dk'' < n+1 = hd$, donc $1 \leq k'' < h$.

Ainsi, $\mathrm{Rac}(U_n) \cap \mathrm{Rac}(U_m) \subset \mathrm{Rac}(U_{h-1})$, ce qui conclut.

14°) (sur 5 points)

$\diamond$ Remarquons d'abord que $g = 0 \iff n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \{0\} \iff n = m = 0$, or n et m sont non tous deux nuls, donc $g \in \mathbb{N}^*$ et l'on peut définir m_1 et n_1.

$\diamond$ On suppose d'abord que n_1 et m_1 sont impairs, donc n et m sont tous deux non nuls. En adaptant l'argument de la question précédente,
il s'agit de montrer que $\mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m) = \mathrm{Rac}(T_g)$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Rac}(T_g)$.

D'après la question 8, il existe $j \in \{0, \ldots, g-1\}$ tel que $x = \cos\left(\frac{2j+1}{2g}\pi\right)$.

Or $n = n_1 g$. donc $x = \cos\left(\frac{(2j+1)n_1}{2n}\pi\right)$.

De plus, n_1 est impair, donc $(2j+1)n_1$ est aussi impair : il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $(2j+1)n_1 = 2k+1$. Alors $x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) \in \mathrm{Rac}(T_n)$,
car $T_n(x) = \cos\left(\frac{2k+1}{2}\pi\right) = 0$. De même, on montre que $x \in \mathrm{Rac}(T_m)$.
Ainsi, $\mathrm{Rac}(T_g) \subset \mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m)$.

$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m)$. Il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $k' \in \{0, \ldots, m-1\}$ tels que $x = \cos\left(\frac{2k+1}{2n}\pi\right) = \cos\left(\frac{2k'+1}{2m}\pi\right)$. Par injectivité de cos sur $[0, \pi]$,
$\frac{2k+1}{2n} = \frac{2k'+1}{2m}$. En multipliant par g, on obtient $\frac{2k+1}{2n_1} = \frac{2k'+1}{2m_1}$,
puis $m_1(2k+1) = (2k'+1)n_1$. Or d'après le cours, $g = n \wedge m = g(n_1 \wedge m_1)$ et $g \neq 0$, donc n_1 et m_1 sont premiers entre eux. Alors, d'après le lemme de Gauss, n_1 divise $2k+1$: il existe $a \in \mathbb{N}$ tel que $2k+1 = n_1 a$. a est nécessairement impair (sinon, $2k+1$ serait pair), donc il existe $k'' \in \mathbb{N}$ tel que $2k+1 = n_1(2k''+1)$. Alors $x = \cos\left(\frac{2k''+1}{2g}\right) \in \mathrm{Rac}(T_g)$.
Ainsi, $\mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m) \subset \mathrm{Rac}(T_g)$, ce qui conclut.

$\diamond$ Supposons maintenant que n et m sont tous deux non nuls, mais que n_1 ou m_1 est pair. On a encore $n_1 \wedge m_1 = 1$, donc n_1 et m_1 ne sont pas tous deux pairs. Si $x \in \mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m)$, on a encore qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $k' \in \{0, \ldots, m-1\}$ tels que $m_1(2k+1) = (2k'+1)n_1$. C'est impossible car l'un des membres de cette égalité est pair et l'autre est impair. Ainsi, $\mathrm{Rac}(T_n) \cap \mathrm{Rac}(T_m) = \emptyset$, ce qui prouve que T_n et T_m sont premiers entre eux. C'est bien sûr encore le cas lorsque $n = 0$ ou $m = 0$.

Partie III : Théorème de Block et Thielmann (sur 24 points)

15°) (sur 1 point)

On sait déjà que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\deg(T_n) = n$ et bien sûr $\deg(X^n) = n$.
Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Alors $X^n \circ X^m = X^{nm} = X^m \circ X^n$, donc $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Alors $T_n \circ T_m(\cos\theta) = T_n(\cos(m\theta)) = \cos(nm\theta)$ et $T_m \circ T_n(\cos\theta) = \cos(mn\theta)$.
Ainsi, $T_n \circ T_m - T_m \circ T_n$ est un polynôme admettant une infinité de racines, donc il est nul, ce qui prouve que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$.

16°) (sur 2 points)
Soit $U, V \in G$. Il existe $a, b, a', b' \in \mathbb{C}$ tels que $U = aX + b$, $V = a'X + b'$, $a \neq 0$ et $a' \neq 0$. Alors $U \circ V(X) = U(a'X + b') = a(a'X + b') + b = aa'X + ab' + b$, or $aa' \neq 0$, donc $U \circ V \in G$. Ainsi, la loi $\circ$ est interne sur G. De plus, d'après le cours, elle est associative sur $\mathbb{C}[X]$, donc en particulier sur G.
$U \circ X = U = X \circ U$ et $X \in G$, donc X est un élément neutre.
Posons $W = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}$. Alors $W \circ U = \frac{1}{a}(aX+b) - \frac{a}{b} = X$ et $U \circ W = a(\frac{1}{a}X - \frac{b}{a}) + b = X$, or $W \in G$, donc U admet un symétrique pour $\circ$ dans G et on a $\boxed{U^{-1} = \frac{1}{a}X - \frac{b}{a}}$.
En conclusion, G est un groupe pour la loi de composition $\circ$.

17°) (sur 2 points) $P_\alpha(Q) = Q^2 + \alpha$ et $Q \circ P_\alpha = Q(X^2 + \alpha)$, donc $Q^2 + \alpha = Q(X^2 + \alpha)$. Q étant non constant, $\text{dom}(Q^2 + \alpha) = \text{dom}(Q^2) = \text{dom}(Q)^2$ (en effet, en passant aux coefficients, on peut montrer que si R et S sont deux polynômes non nuls de $\mathbb{C}[X]$, alors $\text{dom}(RS) = \text{dom}(R)\text{dom}(S)$), or, à nouveau en passant aux coefficients, on voit que $\text{dom}(Q(X^2 + \alpha)) = \text{dom}(Q)$, donc $\text{dom}(Q)^2 = \text{dom}(Q)$ et $\text{dom}(Q) \neq 0$. Ainsi, $\text{dom}(Q) = 1$, ce qui prouve que Q est un polynôme unitaire.

18°) $\diamond$ (sur 3 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons qu'il existe deux polynômes distincts Q et H de degré n qui commutent avec P_α.
On a $Q^2 + \alpha = Q(X^2 + \alpha)$ et $H^2 + \alpha = H(X^2 + \alpha)$, donc en formant la différence de ces deux égalités, $(Q - H)(Q + H) = (Q - H)(X^2 + \alpha)$. Alors, en passant aux degrés, on en déduit que (1) : $\deg(Q - H) + \deg(Q + H) = 2\deg(Q - H)$.
Q et H sont de degré $n \geq 1$, donc ils ne sont pas constants. Alors, d'après la question précédente, Q et H sont unitaires. On en déduit que $\deg(Q + H) = n$ et que $\deg(Q - H) < n$. Or $Q - H$ est supposé non nul, donc $\deg(Q - H) \in \mathbb{N}$. Alors l'égalité (1) montre que $\deg(Q - H) = \deg(Q + H) = n$, ce qui est contradictoire. Ainsi, on a montré qu'il existe au plus un polynôme de degré n qui commute avec P_α.
$\diamond$ (sur 1 point) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, d'après la question 15, $X^n \in \mathcal{C}(X^2)$, donc lorsque $n \geq 1$, d'après le point précédent, X^n est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n qui commute avec X^2.
Si P est un polynôme constant, $P \circ X^2 = P$ et $X^2 \circ P = P^2$, donc les polynômes constants qui commutent avec X^2 sont exactement 0 et 1.
En conclusion, $\boxed{\mathcal{C}(X^2) = \{0\} \cup \{X^n \ / \ n \in \mathbb{N}\}}$.

19°) (sur 3 points)
$\diamond$ Posons $P(X) = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et soit $U = \beta X + \gamma \in G$ avec $\beta \neq 0$.
En composant à droite par U ou U^{-1}, $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha \iff U \circ P = P_\alpha \circ U$, donc

$$\begin{aligned} U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha &\iff \beta(aX^2 + bX + c) + \gamma = (\beta X + \gamma)^2 + \alpha \\ &\iff [\beta a = \beta^2,\ \beta b = 2\beta\gamma,\ \beta c + \gamma = \gamma^2 + \alpha], \end{aligned}$$

or $\beta \neq 0$, donc $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha \iff [\beta = a,\ \gamma = \frac{b}{2},\ \alpha = ac + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}]$.
Ainsi, il existe un unique couple $(U, \alpha) \in G \times \mathbb{C}$ tel que $U \circ P \circ U^{-1} = P_\alpha$.
De plus, $\boxed{U = aX + \frac{b}{2} \text{ et } \alpha = ac + \frac{b}{2} - \frac{b^2}{4}}$.
$\diamond$ Avec $P = T_2 = 2X^2 - 1$, on obtient $\boxed{U = 2X \text{ et } \alpha = -2}$.

20°) (sur 3 points) D'après la question 15, pour tout $n \in \mathbb{N}$, T_n commute avec T_2.
De plus, $(-\frac{1}{2}) \circ T_2 = -\frac{1}{2}$ et $T_2 \circ (-\frac{1}{2}) = (2X^2-1)(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$,
donc $\{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}(T_2)$.
Il reste à établir l'inclusion réciproque.
Soit $P \in \mathcal{C}(T_2)$. Supposons d'abord que P est constant. Alors
$P \circ T_2 = P$ et $T_2 \circ P = 2P^2 - 1$, donc $0 = 2P^2 - P - 1 = (P-1)(2P+1)$. Ainsi, $P = 1 = T_0$ ou bien $P = -\frac{1}{2}$.
Supposons maintenant que $\deg(P) = n \geq 1$.
Posons $U = 2X$ et $\alpha = -2$. Ainsi, d'après la question précédente, en utilisant la notation multiplicative usuelle pour la loi $\circ$, qui est associative,
on a $UT_2U^{-1} = P_\alpha$ et donc $T_2 = U^{-1}P_\alpha U$.
$PT_2 = T_2P$, donc $P(U^{-1}P_\alpha U) = (U^{-1}P_\alpha U)P$, puis $(UPU^{-1})P_\alpha = P_\alpha(UPU^{-1})$. Ainsi $UPU^{-1} \in \mathcal{C}(X^2-2)$.
Ce calcul est également valable en remplaçant P par T_n, car T_n commute avec T_2, donc UT_nU^{-1} commute également avec X^2-2. Or UT_nU^{-1} et UPU^{-1} sont de degré $n \geq 1$, donc d'après la question 18, ils sont égaux. On en déduit que $P = T_n$.
Ainsi, dans tous les cas, $P \in \{-\frac{1}{2}\} \cup \{T_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, ce qui conclut.

21°) (sur 4 points) T_3 commute avec T_2, donc avec les notations de la question précédente, UT_3U^{-1} commute avec $X^2 - 2 = P_{-2}$. Ainsi $\mathcal{C}(P_{-2})$ contient UT_3U^{-1} qui est de degré 3. De plus, $\mathcal{C}(P_0) = \mathcal{C}(X^2)$ contient X^3, donc 0 et -2 sont bien des complexes α tels que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contient un polynôme de degré 3.
Réciproquement, supposons que $\mathcal{C}(P_\alpha)$ contienne un polynôme de degré 3, que l'on notera P. D'après la question 17, P est unitaire. Posons $P = X^3 + aX^2 + bX + c$, avec $a, b, c \in \mathbb{C}$. On a $P \circ P_\alpha = P_\alpha \circ P$,
donc $(X^2+\alpha)^3 + a(X^2+\alpha)^2 + b(X^2+\alpha) + c = (X^3 + aX^2 + bX + c)^2 + \alpha$, c'est-à-dire $X^6 + 3\alpha X^4 + 3\alpha^2 X^2 + \alpha^3 + aX^4 + 2a\alpha X^2 + a\alpha^2 + bX^2 + b\alpha + c = X^6 + a^2X^4 + b^2X^2 + c^2 + 2(aX^5 + bX^4 + cX^3 + abX^3 + acX^2 + bcX) + \alpha$.
En égalant les coefficients de degré 5, on obtient $0 = 2a$, donc $a = 0$, puis en égalant les coefficients de degré 3, $0 = 2c$, donc $c = 0$. Alors l'égalité polynomiale devient :
$X^6 + 3\alpha X^4 + 3\alpha^2 X^2 + \alpha^3 + bX^2 + b\alpha = X^6 + b^2X^2 + 2bX^4 + \alpha$, donc
$3\alpha = 2b$, $3\alpha^2 + b = b^2$ et $\alpha^3 + b\alpha = \alpha$.
Ainsi, $b = \frac{3}{2}\alpha$ et $3\alpha^2 + \frac{3}{2}\alpha = \frac{9}{4}\alpha^2$. D'après la dernière équation, $\alpha = 0$ ou $\alpha + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}\alpha$, c'est-à-dire $\alpha = -2$, ce qui conclut.

22°) (sur 4 points) Supposons que $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie $\mathcal{P}$.
F_2 est de degré 2, donc d'après la question 19, il existe $U \in G$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $UF_2U^{-1} = P_\alpha$.
F_2 et F_3 commutent, donc UF_3U^{-1} commute avec $UF_2U^{-1} = P_\alpha$, or UF_3U^{-1} est de degré 3, donc d'après la question précédente, $\alpha \in \{0, -2\}$.
Premier cas : Supposons que $\alpha = 0$. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F_n commute avec F_2, donc UF_nU^{-1} commute avec $P_\alpha = X^2$, or UF_nU^{-1} est de degré n, donc d'après la question 18, $UF_nU^{-1} = X^n$, puis $F_n = U^{-1}X^nU$.
Second cas : Supposons que $\alpha = -2$. En posant $V = 2X$, on a vu que $T_2 = V^{-1}P_\alpha V$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F_n commute avec F_2, donc UF_nU^{-1} commute avec $P_\alpha = X^2-2 = VT_2V^{-1}$. Ainsi, $V^{-1}(UF_nU^{-1})V$ commute avec $V^{-1}(VT_2V^{-1})V = T_2$, or $V^{-1}(UF_nU^{-1})V$ est de degré n, donc d'après les questions 18 et 20, $V^{-1}(UF_nU^{-1})V = T_n$. Posons $W = V^{-1}U$. On a montré que $WF_nW^{-1} = T_n$, où $W \in G$ (car G est un groupe) et où W ne dépend pas de n, ce qui conclut.