DM 37 :
Algèbres irréductibles.

$\mathbb{K}$ désigne un corps et E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.
On note $N = \dim(E)$ et on suppose que $N \geq 2$.

On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
Lorsque $u, v \in L(E)$, on note uv la composition de u et de v.

Dans tout ce problème, lorsque H est une partie de $L(E)$, on dit que H est une algèbre si et seulement si c'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ tel que, pour tout $u, v \in H$, $uv \in H$. On notera qu'on ne demande pas ici que $\mathrm{Id}_E \in H$.

Partie 1 : Commutant d'une partie de $L(E)$

Lorsque H est une partie de $L(E)$, on note $\mathrm{Com}(H) = \{u \in L(E) \ / \ \forall h \in H, \ \ hu = uh\}$.
Ainsi, $\mathrm{Com}(H)$ est l'ensemble des endomorphismes de E qui commutent avec tous les éléments de H. On l'appelle le commutant de H.

1°) On suppose seulement pour cette question que $E = \mathbb{K}^N$.
Soit $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ N scalaires deux à deux distincts.
On note u l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice diagonale de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$ dont les éléments diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$. Déterminer le commutant de $\{u\}$.

2°) Montrer que $\mathrm{Com}(\{\lambda \mathrm{Id}_E \ / \lambda \in \mathbb{K}\}) = L(E)$ et que $\mathrm{Com}(L(E)) = \{\lambda \mathrm{Id}_E \ / \lambda \in \mathbb{K}\}$: on pourra par exemple passer aux matrices et utiliser les matrices élémentaires.

3°) Soit H et H' deux parties de $L(E)$ telles que $H \subset H'$.
Montrer que $\mathrm{Com}(H') \subset \mathrm{Com}(H)$.

4°) Montrer que, pour toute partie H de $L(E)$, $\mathrm{Com}(H)$ est une algèbre.

5°) Soit I un ensemble non vide et soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille d'algèbres.
Montrer que $\displaystyle\bigcap_{i \in I} A_i$ est une algèbre.

6°) Soit H une partie de $L(E)$.
On note A l'intersection des algèbres contenant H.
Montrer que A est la plus petite algèbre contenant H.
On note P l'ensemble des produits d'un nombre fini non nul d'éléments de H.
Montrer que $A = \mathrm{Vect}(P)$.
On dira que A est l'algèbre engendrée par H.

7°) Soit H une partie de $L(E)$. On note A l'algèbre engendrée par H.
Montrer que $\mathrm{Com}(H) = \mathrm{Com}(A)$.
On pose $\mathrm{Com}^2(H) = \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(H))$. Montrer que $A \subset \mathrm{Com}^2(H)$.
On pose $\mathrm{Com}^3(H) = \mathrm{Com}^2(\mathrm{Com}(H))$. Montrer que $\mathrm{Com}(H) = \mathrm{Com}^3(H)$.

Partie 2 : Parties irréductibles de $L(E)$

Lorsque H est une partie de $L(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E, on dira que F est stable par H si et seulement si, pour tout $h \in H$, $h(F) \subset F$.
On dira qu'une partie H de $L(E)$ est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels de E stables par H sont $\{0\}$ et E.

Dans toute cette partie, on fixe une partie H de $L(E)$ et on note A l'algèbre engendrée par H.

8°) Soit F un sous-espace vectoriel de E.
Montrer que F est stable par H si et seulement si F est stable par A.
En déduire que H est irréductible si et seulement si A est irréductible.

9°) Si $u \in \mathrm{Com}(H)$, montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables par H.

Pour la suite du problème, on dira qu'une algèbre B de $L(E)$ est inversible si et seulement si, pour tout $u \in B$ avec $u \neq 0$, u est inversible et $u^{-1} \in B$.

10°) Si H est irréductible, montrer que $\mathrm{Com}(H)$ est une algèbre inversible.

11°) On suppose pour cette question que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On admettra qu'alors tout endomorphisme de E possède au moins une valeur propre.
Montrer que si H est irréductible, alors $\mathrm{Com}(H) = \{\lambda \mathrm{Id}_E \ / \ \lambda \in \mathbb{C}\}$.

Partie 3 : Idéaux minimaux

Dans toute cette partie, A désigne une partie de $L(E)$.
On suppose que A est une algèbre irréductible.

Si H est une partie de A, on dira que H est un idéal de A si et seulement si H est un sous-espace vectoriel de A tel que, pour tout $a \in A$ et $h \in H$, $ah \in H$.
On dira qu'un tel idéal H est minimal si et seulement si les seuls idéaux de A inclus dans H sont $\{0\}$ et H.

12°) On suppose que H est un idéal minimal de A, avec $H \neq \{0\}$.
On suppose que p est un élément de A tel que $p^2 = p$ et tel que : $\forall h \in H, \ \ hp = 0$.

12. a) Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ et $h_0 \in H$ tels que $h_0(x_0) \neq 0$.

On pose $V = x_0 - p(x_0)$.
Pour tout $h \in H$, on pose $R(h) = h(V)$.

12. b) Montrer que R est une application linéaire non nulle de H dans E telle que $\mathrm{Im}(R)$ est stable par A et $\mathrm{Ker}(R)$ est un idéal de A.

12.c) Montrer que R est un isomorphisme.

12. d) En déduire qu'il existe $V \in E$ et un isomorphisme F de E dans H tel que :

— $p(V) = 0$;
— pour tout $a \in A$ et $X \in E$, $a\ F(X) = F(a(X))$;
— pour tout $X \in E$, $F(X)(V) = X$.

13°) On suppose qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, des applications linéaires $F_1, \ldots, F_n$ de E dans A et des vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ de E tels que, pour tout $X \in E$, pour tout $a \in A$, pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $a\ F_j(X) = F_j(a(X))$ et $F_j(X)(V_k) = \delta_{j,k} X$ (où $\delta_{j,k}$ vaut 0 lorsque $j \neq k$ et 1 lorsque $j = k$).

13. a) Montrer que, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $F_j(V_j)(V_j) = V_j$.

13. b) Montrer que, pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, pour tout $X \in E$,
$F_k(X)\ F_j(V_j) = \delta_{j,k}\ F_j(X)$.

On pose $p = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} F_j(V_j)$.

13. c) Montrer que p est un projecteur.

13. d) Montrer que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$ et pour tout $X \in E$,
$F_j(X)\ p = F_j(X)$ et que $p(V_j) = V_j$.

14°) On reprend les hypothèses de la question 13 et on suppose que $p \neq \mathrm{Id}_E$.

14.a) Montrer qu'il existe $X_0 \in \mathrm{Ker}(p)$ et $a_0 \in A$ tel que $a_0(X_0) \neq 0$.

On pose $J = \{a \in A\ /\ ap = 0\}$.

14.b) Montrer que J est un idéal non nul de A.
Montrer qu'il existe un idéal minimal non nul H de A inclus dans J.

14.c) Montrer qu'il existe une application linéaire F_{n+1} de E dans A et un vecteur $V_{n+1} \in E$ tels que, pour tout $X \in E$, pour tout $a \in A$ et pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n+1\}$, $a\ F_{n+1}(X) = F_{n+1}(a(X))$ et $F_j(X)(V_k) = \delta_{j,k} X$.

15°) Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, des applications linéaires $F_1, \ldots, F_n$ de E dans A et des vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ de E tels que, pour tout $X \in E$, pour tout $a \in A$, pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $a\ F_j(X) = F_j(a(X))$ et $F_j(X)(V_k) = \delta_{j,k} X$, avec de plus $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} F_j(V_j) = \mathrm{Id}_E$.

16°) On reprend les notations de la question 15.
Pour tout $X, Y \in E$, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, posons $G_j(X)(Y) = F_j(Y)(X)$.

16.a) Montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $\mathrm{Im}(G_j) \subset \mathrm{Com}(A)$.

16.b) Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, montrer que $\mathrm{Com}(\mathrm{Im}(F_j)) \subset \mathrm{Im}(G_j)$,
puis en déduire que $\mathrm{Im}(G_j) = \mathrm{Com}(A)$.

16.c) Lorsque $b \in \mathrm{Com}^2(A)$, montrer que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $b\ F_j(V_j) = F_j(b(V_j))$.

16.d) En déduire que $A = \mathrm{Com}^2(A)$.

17°) Pour cette seule question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Montrer que $L(E)$ est la seule algèbre irréductible de $L(E)$.

18°) Pour cette seule question, on suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et que $A \neq L(E)$.
On suppose également que, pour tout $u, v \in \mathrm{Com}(A)$, $uv = vu$.

18.a) Montrer que $\mathrm{Com}(A)$ est un corps.

18.b) Soit $u \in \mathrm{Com}(A)$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(u) = 0$.
En déduire qu'il existe $J \in \mathrm{Com}(A)$ tel que $J^2 = -\mathrm{Id}_E$.

18.c) Montrer que $\mathrm{Com}(A)$ est un corps isomorphe à $\mathbb{C}$.

18.d) Montrer que E peut-être muni d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel pour laquelle A est l'ensemble des $\mathbb{C}$-endomorphismes de E.