Résumé de cours :
Semaine 30, du 21 au 24 mai.

Les déterminants

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1 Applications multilinéaires

Définition. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $(E_1, \dots, E_p)$ une famille de p $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.
Soient F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et f une application de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
f est une ***application p-linéaire*** si et seulement si, pour tout $j \in \mathbb{N}_p$
et pour tout $(a_1, \dots, a_{j-1}, a_{j+1}, \dots, a_p) \in E_1 \times \cdots \times E_{j-1} \times E_{j+1} \times \ldots \times E_p$,
l'application $\begin{array}{ccc} E_j & \longrightarrow & F \\ x_j & \longmapsto & f(a_1, \dots, a_{j-1}, x_j, a_{j+1}, \dots, a_p) \end{array}$ est linéaire.

Définition. Une ***application bilinéaire*** est une application 2-linéaire.

Notation.
- $L_p(E_1, \dots, E_p; F)$ désigne l'ensemble des applications p-linéaires de $E_1 \times \cdots \times E_p$ dans F.
  C'est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(E_1 \times \cdots \times E_p, F)$.
- On note $L_p(E, F) = L_p(\underbrace{E, \dots, E}_{p \text{ fois}}; F)$ et $L_p(E) = L_p(E, \mathbb{K})$.
  Les éléments de $L_p(E)$ sont appelés des ***formes p-linéaires*** sur E.

Notation. On fixe $p \in \mathbb{N}^*$ et deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels E et F.

Propriété. Soit $u_1, \dots, u_p$ p applications linéaires de E dans $\mathbb{K}$.
Alors l'application $\begin{array}{cccc} u : & E^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & \displaystyle\prod_{i=1}^{p} u_i(x_i) \end{array}$ est une forme p-linéaire.

Définition. Soient $\sigma \in \mathcal{S}_p$ et $f \in L_p(E, F)$. On note $\begin{array}{cccc} \sigma(f) : & E^p & \longrightarrow & F \\ & (x_1, \dots, x_p) & \longmapsto & f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) \end{array}$.

Définition. Soit $f \in L_p(E, F)$. f est une application p-linéaire symétrique (resp : antisymétrique) si et seulement si pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_p$, $\sigma(f) = f$ (resp : $\sigma(f) = \varepsilon(\sigma) f$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ).

Propriété. Soit $f \in L_p(E, F)$.
f est symétrique si et seulement si pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f) = f$.
f est antisymétrique si et seulement si pour toute transposition τ de $\mathcal{S}_p$, $\tau(f) = -f$.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit $f \in L_p(E, F)$. f est ***une application p-linéaire alternée*** si et seulement si elle annule tout p-uplet de vecteurs de E contenant au moins deux vecteurs égaux.

Propriété. Soit $f \in L_p(E,F)$.
Si f est alternée, alors elle est antisymétrique.
Lorsque $car(\mathbb{K}) \neq 2$, alternée $\Longleftrightarrow$ antisymétrique.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $f \in L_p(E,F)$ est alternée si et seulement si pour tout $(x_1,\ldots,x_p) \in E^p$, $f(x_1,\ldots,x_p)$ ne varie pas lorsque l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j, ou encore si et seulement si l'image par f de toute famille liée de vecteurs est nulle.

Corollaire. Si E est de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et si $p > n$, toute forme p-linéaire alternée sur E est nulle.

2 Déterminant d'un système de n vecteurs

Au sein de ce paragraphe, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie égale à n, avec $n > 0$.

2.1 Définition du déterminant

Définition. Soit $e = (e_1,\ldots,e_n)$ une base de E et $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$.
Le ***déterminant de*** x dans la base e est le scalaire $\det_e(x_1,\ldots,x_n) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j)$.

Théorème. Soit e une base de E. $\boxed{\text{Si } f \text{ est une forme } n\text{-linéaire alternée sur } E, \text{ alors } f = f(e)\det_e.}$
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $\det_e(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{\sigma(j)}(x_j) = \sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} e^*_{j}(x_{\sigma(j)})$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $\det_e$ est une forme n-linéaire alternée telle que $\det_e(e) = 1$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. $A_n(E)$ est une droite vectorielle dirigée par $\det_e$.

2.2 Volume

Supposons temporairement que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Pour tout $x = (x_1,\ldots,x_n) \in E^n$, on note H_x l'hyperparallélépipède $H_x = \{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i \ / \ t_1,\ldots,t_n \in [0,1]\}$.
Si vol est une application de E^n dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in E^n$, $|\mathrm{vol}(x)|$ représente le volume de H_x et le signe de $\mathrm{vol}(x)$ représente l'orientation du n-uplet x, alors en imposant des contraintes raisonnables aux notions de volume et d'orientation, l'application vol est nécessairement une forme n-linéaire alternée.

Propriété. $\det_e(x)$ est donc la seule définition raisonnable du volume algébrique de H_x, si l'on choisit l'unité de volume de sorte que le volume de H_e soit égal à 1.

2.3 Déterminant d'une matrice

Définition. Le déterminant de $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est le déterminant des vecteurs colonnes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Représentation tabulaire. Si $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On note $\det(M) = \begin{vmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots & \alpha_{n,n} \end{vmatrix}$.

Propriété. $\boxed{\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} M_{j,\sigma(j)} = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} M_{\sigma(j),j} = \det({}^tM).}$
Ainsi $\det(M)$ est aussi le déterminant des vecteurs lignes de M dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Formule de Sarrus :

$$\begin{vmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} p_{1,1}p_{2,2}p_{3,3} + p_{2,1}p_{3,2}p_{1,3} + p_{3,1}p_{1,2}p_{2,3} \\ \\ -p_{1,3}p_{2,2}p_{3,1} - p_{2,3}p_{3,2}p_{1,1} - p_{3,3}p_{1,2}p_{2,1}. \end{array}$$

2.4 Déterminant d'un endomorphisme

Définition. Soit $u \in L(E)$. Le ***déterminant de l'endomorphisme*** u est l'unique scalaire, noté $\det(u)$, vérifiant $\forall f \in A_n(E) \quad \forall x \in E^n \quad f(u(x)) = (\det(u))f(x)$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base de E et $u \in L(E)$.
Pour tout $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$, $\boxed{\det_e(u(x_1), \ldots, u(x_n)) = \det(u)\det_e(x_1, \ldots, x_n)}$.
En particulier, $\det(u) = \det_e(u(e_1), \ldots, u(e_n))$.

Propriété. Pour toute base e de E et pour tout $u \in L(E)$, $det(u) = det(Mat(u, e))$.

3 Propriétés du déterminant

Notation. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et e une base de E.

Propriété. det_e est n-linéaire alternée, donc antisymétrique. $\det_e(e) = 1$.
$\det_e(x_1, \ldots, x_n)$ n'est pas modifié si l'on ajoute à l'un des x_i une combinaison linéaire des autres x_j.

Propriété. Le déterminant d'une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est modifié en :
- $\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow L_i + \lambda L_j$ ou $C_i \longleftarrow C_i + \lambda C_j$;
- $\alpha\det(M)$ pour une opération élémentaire du type $L_i \longleftarrow \alpha L_i$ ou $C_i \longleftarrow \alpha C_i$;
- $-\det M$ pour un échange entre deux lignes ou deux colonnes.

ATTENTION : En général, $\det(\alpha M + N) \neq \alpha\det(M) + \det(N)$.

Méthode : Pour calculer le déterminant d'une matrice, on tente de modifier la matrice par des manipulations élémentaires, afin de se ramener à une matrice dont on connait le rang ou le déterminant.

Propriété. $\det(Id_E) = 1$, $\det(I_n) = 1$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $u \in L(E)$, $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$.
Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Théorème. Si $f, g \in L(E)$, alors $\boxed{\det(fg) = \det(f) \times \det(g)}$.
Pour tout $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
Il faut savoir le démontrer.

Formule de changement de base : Soient e et e' deux bases de E, et soit x une famille de n vecteurs de E. Alors, $\boxed{\det_{e'}(x) = \det_{e'}(e)\det_e(x)}$.

Théorème. $\boxed{x \text{ est une base si et seulement si } \det_e(x) \neq 0.}$
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Soit $u \in L(E)$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
$u \in GL(E)$ si et seulement si $\det(u) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(u^{-1}) = \dfrac{1}{\det(u)}$.

$A \in GL_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas, $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

Remarque. det est donc un morphisme du groupe $GL(E)$ vers $(\mathbb{K}^*, \times)$.
Son noyau est un sous-groupe (distingué) de $GL(E)$, noté $SL(E)$.
C'est le groupe spécial linéaire de E : $SL(E) = \{u \in L(E) \ / \ \det(u) = 1\}$.
En particulier de $SL_n(\mathbb{K}) = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ / \ \det(M) = 1\}$: c'est le groupe spécial linéaire de degré n.

Propriété. Deux matrices carrées semblables ont le même déterminant.

4 Calcul des déterminants

Définition. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, notons ${}_{i,j}M$ la matrice extraite de M en ôtant la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne. La quantité $\det({}_{i,j}M)$ s'appelle le $(i,j)^{\text{ème}}$ ***mineur*** de M
La quantité $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\det({}_{i,j}M)$ s'appelle le $(i,j)^{\text{ème}}$ ***cofacteur*** de M.

Théorème. Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$,
$\det(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$: c'est **le développement de det(M) selon sa $j^{\text{ème}}$ colonne.**
Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $\det(M) = \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}C_{i,j}$: c'est le **développement de det(M) selon sa $i^{\text{ème}}$ ligne.**
Il faut savoir le démontrer.

Définition. On appelle ***comatrice*** de M la matrice $(C_{i,j})_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le n}}$ des cofacteurs de M.
On la notera $Com(M)$ ou bien $Cof(M)$.
La transposée de la comatrice s'appelle la ***matrice complémentaire*** de M.

Théorème. $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \quad M\,{}^tCof(M) = {}^tCof(M)M = \det(M)I_n$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Lorsque M est inversible, $M^{-1} = \dfrac{1}{\det(M)}\,{}^tCof(M)$.

Théorème. Soit $M = (M_{i,j})_{\substack{1\le i\le a\\ 1\le j\le a}}$ une matrice décomposée en blocs, où, pour tout $i,j \in \mathbb{N}_a$, $M_{i,j} \in \mathcal{M}_{n_i,n_j}(\mathbb{K})$. Si M est triangulaire supérieure (ou inférieure) par blocs, $\det(M) = \prod_{i=1}^{a} \det(M_{i,i})$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est égal au produit de ses éléments diagonaux.

5 Formules de Cramer

Propriété. Considérons un système linéaire de Cramer (S) : $MX = B$, où $M \in GL_n(\mathbb{K})$, $B \in \mathbb{K}^n$, dont l'unique solution est notée $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^n$. Alors, pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\boxed{x_j = \dfrac{\det({}_jM)}{\det(M)}}$
où ${}_jM$ est la matrice dont les colonnes sont celles de M, sauf la $j^{\text{ème}}$ qui est égale à B.
Il faut savoir le démontrer.

6 Exemples de déterminants.

6.1 Déterminant de Vandermonde

Définition. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$.
La ***matrice de Vandermonde*** est $\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n) = (a_{i-1}^{j-1}) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{K})$,
et le ***déterminant de Vandermonde*** est $V(a_0, \dots, a_n) = \det(\mathcal{V}(a_0, \dots, a_n))$.

Propriété. $V(a_0, \dots, a_n) = \displaystyle\prod_{0 \le i < j \le n} (a_j - a_i)$.

Il faut savoir le démontrer.