DM 38. Enoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.
Il n'est pas à rendre.
Un corrigé sera fourni mercredi 29 mai.

Notations.

Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

— On note $\mathcal{L}(V)$ l'algèbre des endomorphismes de V ;
— on note I l'application identique de V ;
— on note fg le produit (au sens de la composition) des éléments f et g de $\mathcal{L}(V)$;
— on note f^q le produit de q éléments de $\mathcal{L}(V)$ identiques à f, et par convention $f^0 = I$.
— Si X est un espace vectoriel de dimension finie, on note $\dim(X)$ sa dimension.
— Si f est une application linéaire, on note respectivement $\mathrm{Im} f$, $\mathrm{Ker} f$, $\mathrm{rg} f$, son image, son noyau et son rang.
— Si A est une partie d'un espace vectoriel on note $\mathrm{Vect}(A)$ le sous-espace vectoriel engendré par A.

Partie I : Idéaux de $\mathcal{L}(V)$

$\diamond$ On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à gauche lorsque M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V),\ \forall f \in M, \quad \varphi f \in M$$

On dit que la partie M de $\mathcal{L}(V)$ est un idéal à droite lorsque M est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(V)$ et que

$$\forall \varphi \in \mathcal{L}(V),\ \forall f \in M, \quad f\varphi \in M$$

$\diamond$ Soit W un sous-espace vectoriel de V ;
on note J_W l'ensemble des endomorphismes de V dont l'image est contenue dans W et K_W l'ensemble des endomorphismes de V dont le noyau contient W.

$\diamond$ Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$, on note Δ_f l'ensemble des $f\varphi$ où φ décrit $\mathcal{L}(V)$ et Γ_f l'ensemble des φf où φ décrit $\mathcal{L}(V)$.

1°) a) Soit f un élément de $\mathcal{L}(V)$.
Montrer que Δ_f est un idéal à droite et que Γ_f est un idéal à gauche.
b) Soit W un sous-espace vectoriel de V.
Montrer que J_W est un idéal à droite et que K_W est un idéal à gauche.

2°) a) Soit W un sous-espace vectoriel de V.
Montrer que $\dim(J_W) = (\dim V)(\dim W)$ et que $\dim(K_W) = (\dim V - \dim W)(\dim V)$.
b) Soit f un endomorphisme de V.
Montrer que $\dim(\Delta_f) = (\mathrm{rg} f)(\dim V) = \dim(\Gamma_f)$.
c) Soit W un sous-espace vectoriel de V.
Montrer qu'il existe f dans J_W telle que $\Delta_f = J_W$ et g dans K_W telle que $\Gamma_g = K_W$.

3°) a) Soit W, W' des sous-espaces vectoriels de V.
Montrer que $J_W \cap J_{W'} = J_{W \cap W'}$ et $K_W \cap K_{W'} = K_{W+W'}$.
b) Montrer que $J_W + J_{W'} = J_{W+W'}$ et $K_W + K_{W'} = K_{W \cap W'}$.

4°) a) Soit M un idéal à droite de $\mathcal{L}(V)$. Soit W un sous-espace vectoriel de V tel que $J_W \subset M$ et tel qu'aucun sous-espace W' de V ne vérifie $J_{W'} \subset M$ et $\dim W' > \dim W$.
Montrer que $J_W = M$.
b) Soit M un idéal à gauche de $\mathcal{L}(V)$. Montrer de même qu'il existe un sous-espace vectoriel W de V tel que $K_W = M$.
c) Conclure de cette étude que pour tout idéal à droite M de $\mathcal{L}(V)$, il existe f dans $\mathcal{L}(V)$ telle que $\Delta_f = M$ et que pour tout idéal à gauche M de $\mathcal{L}(V)$, il existe g telle que $\Gamma_g = M$.

5°) a) Soit U et W des sous-espaces vectoriels de V.
Montrer que $\dim(J_U \cap K_W) = (\dim U)(\dim V - \dim W)$.
b) Montrer que $\{0\}$ et $\mathcal{L}(V)$ sont les seules parties de $\mathcal{L}(V)$ qui sont à la fois idéal à gauche et idéal à droite.

Partie II : Bases stables de $\mathcal{L}(V)$

◇ On pose $n = \dim(V)$ et on suppose jusqu'à la fin du problème que $n \geq 2$.
◇ Une base S de $\mathcal{L}(V)$ est dite stable lorsqu'elle vérifie :

$$\forall f, g \in S, \quad fg \in S \text{ ou } fg = 0.$$

6°) Soit B une base de V, notée $B = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$.
Une partie S de $\mathcal{L}(V)$ est dite canoniquement associée à B lorsqu'il existe une bijection $(i, j) \mapsto f_{ij}$ de $\{1, \ldots, n\}^2$ sur S telle que :

$$\forall i, j, k \in \{1, \ldots, n\} \quad f_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0 & \text{si } j \neq k \\ e_i & \text{si } j = k \end{cases}.$$

Dans ce cas, déterminer pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ la matrice de $f_{i,j}$ dans la base B, puis montrer que S est une base de $\mathcal{L}(V)$ qui est stable.

Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$ et soit r le minimum du rang des éléments de S.
On note S' l'ensemble des f de S telles que $\mathrm{rg} f = r$.

7°) Montrer que :

$$\forall g \in S,\ \forall f \in S',\ (gf \in S' \text{ ou } gf = 0) \text{ et } (fg \in S' \text{ ou } fg = 0).$$

En utilisant la question 5.b, montrer que $\mathrm{Vect}(S') = \mathcal{L}(V)$ puis que $S' = S$.
Tous les éléments de S ont donc le même rang r.

8°) On veut montrer dans cette question que $r < n$.
a) Montrer que si l'élément φ de $\mathcal{L}(V)$ vérifie $\forall h \in \mathcal{L}(V)$, $\varphi h = h\varphi$, alors il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $\varphi = \lambda I$.
b) On pose $\varphi = \sum_{f \in S} f$. Montrer que si l'on avait $r = n$ alors on aurait

$$\forall g \in S, \quad \varphi g = g\varphi = \varphi.$$

c) Conclure.

On note désormais $\mathcal{J}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels U de V tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\mathrm{Im} f = U$; on note $\mathcal{K}$ l'ensemble des sous-espaces vectoriels W de V tels qu'il existe au moins un élément f de S vérifiant $\mathrm{Ker} f = W$.

Pour tout U de $\mathcal{J}$ et pour tout W de $\mathcal{K}$ on note S_U l'ensemble des f de S telles que $\mathrm{Im} f = U$ et S^W l'ensemble des f de S telles que $\mathrm{Ker} f = W$.

9°) **a)** Montrer que $\mathrm{Vect}(S_U) = J_U$ et que $\mathrm{Vect}(S^W) = K_W$ pour tout U de $\mathcal{J}$ et tout W de $\mathcal{K}$.
b) Montrer que $\mathcal{L}(V)$ est la somme directe des J_U, où U décrit $\mathcal{J}$, c'est-à-dire :

$$\mathcal{L}(V) = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} J_U.$$

c) Montrer que V est la somme directe des U, où U décrit $\mathcal{J}$ (on pourra utiliser la décomposition de I dans la somme des J_U).

10°) **a)** Soit W un élément de $\mathcal{K}$. Montrer que K_W est la somme directe des sous-espaces vectoriels engendrés par les $S_U \cap S^W$, où U décrit $\mathcal{J}$:

$$K_W = \bigoplus_{U \in \mathcal{J}} \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W)$$

b) En déduire que

$$\forall U \in \mathcal{J}, \forall W \in \mathcal{K}, \mathrm{Vect}(S_U \cap S^W) = K_W \cap J_U.$$

11°) **a)** Soit f un élément de $S_U \cap S^W$. Montrer que $f^2 = 0$ ou $f^2 \in S_U \cap S^W$.
b) En déduire que pour tout $W \in \mathcal{K}$ et tout $U \in \mathcal{J}$, ou bien $U \subset W$ ou bien $U \oplus W = V$.
c) Montrer que pour tout élément W de $\mathcal{K}$, il existe au moins un élément U de $\mathcal{J}$ tel que $U \oplus W = V$.

12°) Soit (U, W) un élément de $\mathcal{J} \times \mathcal{K}$ tel que $U \oplus W = V$.
On définit une application $f \mapsto \tilde{f}$ de $J_U \cap K_W$ dans $\mathcal{L}(U)$ en posant

$$\forall x \in U, \ \ \tilde{f}(x) = f(x).$$

a) Montrer que $f \mapsto \tilde{f}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
b) En appliquant la question 8 à U, montrer que $r = 1$.
c) Montrer que $S_U \cap S^W$ a pour unique élément la projection d'image U et de noyau W.

13°) **a)** Montrer que $\mathcal{J}$ et $\mathcal{K}$ ont chacun n éléments et que pour tout $U \in \mathcal{J}$ et tout $W \in \mathcal{K}$, $S_U \cap S^W$ est un singleton. On note $\varphi_{U,W}$ l'unique élément de $S_U \cap S^W$.
b) Montrer que :

$$\varphi_{U,W}\varphi_{U',W'} = \begin{cases} 0 & \text{si } U' \subset W \\ \varphi_{U,W'} & \text{si } U' \oplus W = V \end{cases}.$$

c) Montrer que $\displaystyle\bigcap_{W \in \mathcal{K}} W = \{0\}$.

Partie III : Construction de bases stables

On note $V^* = \mathcal{L}(V, \mathbb{K})$ le dual de V.
Soit S une base stable de $\mathcal{L}(V)$.

14°) Montrer que l'on peut trouver une base $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ de V, une base $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ de V^* et une matrice $\Lambda = (\lambda_{ij})_{1 \le i,j \le n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ telles que les éléments de S sont les n^2 endomorphismes φ_{ij} définis par $\varphi_{ij}(x) = \lambda_{ij}\theta_j(x)e_i$, pour tout $x \in V$.

On note Ω la matrice $(\theta_i(e_j))_{1 \le i,j \le n}$ et on désigne par A l'ensemble des couples (i, j) tels que $\theta_i(e_j) \neq 0$.

15°) **a)** Lorsque $(j, k) \in A$, montrer que pour tout $i, \ell \in \{1, \dots, n\}$, $\lambda_{ij}\lambda_{k,\ell}\theta_j(e_k) = \lambda_{i,\ell}$.
Montrer qu'on peut choisir les bases $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ et $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ de façon que $\theta_1(e_1) = 1$. On pose alors $a_i = \lambda_{i1}$ et $b_j = \lambda_{1j}$.
b) Montrer que si $(j, k) \in A$ alors $\theta_j(e_k) = \dfrac{1}{a_k b_j}$.
c) Montrer qu'il existe une base $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ de V et une base $(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$ de V^* telles que si $(j, k) \in A$ alors $\theta'_j(e'_k) = 1$ et telles que les éléments de S vérifient : $\varphi_{ij}(x) = \theta'_j(x)e'_i$, pour tout $x \in V$.

16°) Quitte à remplacer $(e_1, e_2, \dots, e_n)$ par $(e'_1, e'_2, \dots, e'_n)$ et $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ par $(\theta'_1, \theta'_2, \dots, \theta'_n)$, on peut donc supposer que $\forall i, j$, $\lambda_{ij} = 1$, et que si $(j, k) \in A$ alors $\theta_j(e_k) = 1$. Montrer que la matrice Ω est inversible. En déduire comment construire toutes les bases stables de $\mathcal{L}(V)$.

17°) Construire, pour $n = 2$, une base stable de $\mathcal{L}(V)$ qui ne soit pas canoniquement associée à une base de V.