DM 37 :
Un corrigé.

Partie 1 : Commutant d'une partie de $L(E)$

1°) Lorsque $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, convenons de noter $M_{i,j}$ le (i,j)-ième coefficient de M. Notons D la matrice de u dans la base canonique de $\mathbb{K}^N$.

Soit $M \in \mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. Pour tout $i,j \in \mathbb{N}_N$, $[MD]_{i,j} = \sum_{k=1}^{N} M_{i,k}D_{k,j} = M_{i,j}D_{j,j}$, car D est diagonale. De même, $[DM]_{i,j} = D_{i,i}M_{i,j} = \lambda_i M_{i,j}$, donc

$$\begin{aligned} MD = DM \quad &\Longleftrightarrow \forall i,j \in \mathbb{N}_N \ \ \lambda_i M_{i,j} = \lambda_j M_{i,j} \\ &\Longleftrightarrow \forall i,j \in \mathbb{N}_N, \ \ (i \neq j \Longrightarrow M_{i,j} = 0), \end{aligned}$$

car pour $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$. Ceci démontre que le commutant de $\{D\}$ est égal à l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$. C'est donc aussi le commutant de $\{u\}$, en identifiant une matrice avec son endomorphisme canoniquement associé.

2°) Soit $u \in L(E)$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $(\lambda \mathrm{Id}_E)u = \lambda u = u(\lambda \mathrm{Id}_E)$, donc $u \in \mathrm{Com}(\mathbb{K}\mathrm{Id}_E)$. Ainsi, $\mathrm{Com}(\{\lambda \mathrm{Id}_E \ / \lambda \in \mathbb{K}\}) = L(E)$.
Soit $u \in \mathrm{Com}(L(E))$. Il existe une base e de E. Notons $M = \mathrm{mat}(u,e)$. u commute avec tout endomorphisme de E, donc M commute avec toutes les matrices de $\mathcal{M}_N(\mathbb{K})$, donc avec toutes les matrices élémentaires $E_{i,j}$, où $i,j \in \mathbb{N}_N$.

Soit $i,j \in \mathbb{N}_N$. Soit $h,k \in \mathbb{N}_N$. $[E_{i,j}M]_{h,k} = \sum_{\ell=1}^{N} [E_{i,j}]_{h,\ell} M_{\ell,k} = \delta_{i,h} M_{j,k}$

et $[ME_{i,j}]_{h,k} = \sum_{\ell=1}^{N} M_{h,\ell}[E_{i,j}]_{\ell,k} = M_{h,i}\delta_{j,k}$.
Ainsi, pour tout $i,j,h,k \in \mathbb{N}_N$, $\delta_{i,h}M_{j,k} = \delta_{j,k}M_{h,i}$.
Lorsque $j \neq k$ avec $h = i$, on en déduit que $M_{j,k} = 0$, donc M est diagonale.
Lorsque $j = k$ et $h = i$, on en déduit que $M_{j,j} = M_{i,i}$, donc $M = \lambda I_n$ où $\lambda = M_{1,1}$, puis $u = \lambda \mathrm{Id}_E$. Ceci démontre que $\mathrm{Com}(L(E)) \subset \mathbb{K}\mathrm{Id}_E$. Réciproquement, si $u = \lambda \mathrm{Id}_E$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, on a vu que u commute avec tout endomorphisme de E, donc $u \in \mathrm{Com}(L(E))$.
On a donc montré que $\mathrm{Com}(L(E)) = \{\lambda \mathrm{Id}_E \ / \lambda \in \mathbb{K}\}$.

3°) Soit $u \in \mathrm{Com}(H')$. Soit $h \in H$. Alors $h \in H'$ et $u \in \mathrm{Com}(H')$, donc $uh = hu$. Ceci démontre que $u \in \mathrm{Com}(H)$. Ainsi, $\mathrm{Com}(H') \subset \mathrm{Com}(H)$.

4°) Soit H une partie de $L(E)$.
0 commute avec tout endomorphisme de E, donc $0 \in \text{Com}(H)$,
ainsi $\text{Com}(H)$ est non vide.
Soit $u, v \in \text{Com}(H)$, soit $\alpha \in \mathbb{K}$. Soit $p \in H$.
On a $(\alpha u + v)p = \alpha up + vp = \alpha pu + pv = p(\alpha u + v)$, donc $\alpha u + v \in \text{Com}(H)$
et $(uv)p = u(vp) = u(pv) = (up)v = (pu)v = p(uv)$, donc $uv \in \text{Com}(H)$.
Ainsi, $\text{Com}(H)$ est bien une algèbre.

5°) Posons $B = \bigcap_{i \in I} A_i$ et montrons que c'est une algèbre.
B est un sous-espace vectoriel de $L(E)$ en tant qu'intersection de sous-espaces vectoriels.
Soit $u, v \in B$. Soit $i \in I$. A_i est une algèbre et $u, v \in A_i$, donc $uv \in A_i$. Ainsi, $uv \in B$.
Ceci montre que B est une algèbre.

6°) $\diamond$ E est une algèbre contenant H, donc l'ensemble $\mathcal{H}$ des algèbres contenant H est non vide. On peut donc poser $A = \bigcap_{a \in \mathcal{H}} a$. D'après la question précédente, A est une algèbre. De plus c'est une intersection de parties contenant H, donc $H \subset A$.
Soit B une algèbre contenant H. Alors $B \in \mathcal{H}$, donc $A = \bigcap_{a \in \mathcal{H}} a \subset B$.
Ainsi, A est la plus petite algèbre contenant H.
$\diamond$ Posons $C = \text{Vect}(P)$.
Montrons que C est une algèbre : c'est un sous-espace vectoriel par définition. Soit $u, v \in C$. Il existe $(\alpha_p)_{p \in P}$ et $(\beta_p)_{p \in P}$, deux familles presque nulles de scalaires telles que $u = \sum_{p \in P} \alpha_p p$ et $v = \sum_{p \in P} \beta_p p$. Alors par distributivité dans $L(E)$, $uv = \sum_{p,q \in P} \alpha_p \beta_q pq$, or par définition de P, pour tout $p, q \in P$, $pq \in P$, donc $uv \in \text{Vect}(P) = C$. Ceci montre que C est une algèbre.
On a clairement $H \subset P \subset C$.
Soit maintenant B une algèbre contenant H. Il reste à montrer que $C \subset B$. Ainsi, C sera la plus petite algèbre contenant H, donc on aura prouvé que $A = C = \text{Vect}(P)$.
Or B est stable par produit, donc $P \subset B$, puis B est un sous-espace vectoriel, donc $C = \text{Vect}(P) \subset B$.

7°) $\diamond$ $H \subset A$, donc d'après la question 3, $\text{Com}(A) \subset \text{Com}(H)$.
Soit $u \in \text{Com}(H)$. Alors $H \subset \text{Com}(\{u\})$, or $\text{Com}(\{u\})$ est une algèbre,
donc $A \subset \text{Com}(\{u\})$, ce qui prouve que $u \in \text{Com}(A)$. Ainsi, $\text{Com}(H) \subset \text{Com}(A)$.
En conclusion, $\text{Com}(A) = \text{Com}(H)$.
$\diamond$ Soit $h \in H$. h commute avec tout élément de $\text{Com}(H)$, donc $h \in \text{Com}(\text{Com}(H))$.
Ainsi, $H \subset \text{Com}^2(H)$, mais $\text{Com}^2(H)$ est une algèbre, donc $A \subset \text{Com}^2(H)$.
$\diamond$ On vient d'écrire que $H \subset \text{Com}^2(H)$, pour toute partie H de $L(E)$. C'est donc vrai en remplaçant H par $\text{Com}(H)$. Ainsi, $\text{Com}(H) \subset \text{Com}^2(\text{Com}(H)) = \text{Com}^3(H)$.
De plus, toujours en partant de $H \subset \text{Com}^2(H)$, la question 3 montre que
$\text{Com}(\text{Com}^2(H)) \subset \text{Com}(H)$.

Or Com est une application de $\mathcal{P}(L(E))$ dans $\mathcal{P}(L(E))$, donc par associativité de la composition, $\text{Com}(\text{Com}^2(H)) = [\text{Com} \circ (\text{Com} \circ \text{Com})](H) = [(\text{Com} \circ \text{Com}) \circ \text{Com}](H)$. Ainsi, $\text{Com}(\text{Com}^2(H)) = \text{Com}^2(\text{Com}(H)) = \text{Com}^3(H)$, ce qui conclut.

Partie 2 : Parties irréductibles de $L(E)$

8°) Si F est stable par A, pour tout $h \in A$, $h(F) \subset F$, donc en particulier, pour tout $h \in H$, $h(F) \subset F$, donc F est stable par H.
Supposons que F est stable par H. Reprenons les notations de la question 6. Soit $u \in P$. Il existe $u_1, \ldots, u_n \in H$ tel que $u = u_1 \cdots u_n$.
Soit $x \in F$. On montre facilement par récurrence descendante que,
pour tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, $u_k \cdots u_n(x) \in F$, donc $u(F) \subset F$. Ainsi, F est stable par P.
Soit maintenant $u \in A = \text{Vect}(P)$. Il existe $p_1, \ldots, p_n \in P$ et $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ tels que $u = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i$. Alors, pour tout $x \in F$, $p_i(x) \in F$, or F est un sous-espace vectoriel de E, donc $u(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i(x) \in F$. Ainsi, pour tout $u \in A$, $u(F) \subset F$, donc F est stable par A.
Ainsi, les sous-espaces vectoriels stables par A sont exactement les sous-espaces vectoriels stables par H, or H (resp : A) est irréductible si et seulement si les seuls sous-espaces vectoriels stables par H (resp : A) sont $\{0\}$ et E, donc H est irréductible si et seulement si A est irréductible.

9°) Soit $u \in \text{Com}(H)$. Soit $v \in H$.
$\diamond$ Soit $x \in \text{Ker}(u)$. Alors $u(v(x)) = v(u(x)) = v(0) = 0$, donc $v(x) \in \text{Ker}(u)$. Ainsi, $v(\text{Ker}(u)) \subset \text{Ker}(u)$, pour tout $v \in H$, donc $\text{Ker}(u)$ est stable par H.
$\diamond$ Soit $x \in \text{Im}(u)$. Il existe $y \in E$ tel que $x = u(y)$.
Alors $v(x) = v(u(y)) = u(v(y)) \in \text{Im}(u)$, donc $v(\text{Im}(u)) \subset \text{Im}(u)$, pour tout $v \in H$, donc $\text{Im}(u)$ est stable par H.

10°) Supposons que H est irréductible. D'après la question 4, $\text{Com}(H)$ est une algèbre. Soit $u \in \text{Com}(H)$ avec $u \neq 0$. D'après la question précédente, $\text{Ker}(u)$ est stable par H, mais H est irréductible, donc $\text{Ker}(u) \in \{\{0\}, E\}$, or $u \neq 0$, donc $\text{Ker}(u) = \{0\}$. Ainsi, u est injective.
De même, $\text{Im}(u) \in \{\{0\}, E\}$ et $u \neq 0$, donc $\text{Im}(u) = E$. Ainsi u est inversible.
Soit $v \in H$. Alors $uv = vu$, donc $u^{-1}(uv)u^{-1} = u^{-1}(vu)u^{-1}$, puis $vu^{-1} = u^{-1}v$. Ainsi, $u^{-1} \in \text{Com}(H)$. Ceci prouve que $\text{Com}(H)$ est inversible.

11°) Soit $u \in \text{Com}(H)$. D'après l'énoncé, u admet au moins une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$. Id_E commute avec tout endomorphisme, donc $\text{Id}_E \in \text{Com}(H)$. De plus $\text{Com}(H)$ est une algèbre, donc c'est un sous-espace vectoriel. Ainsi, $u - \lambda \text{Id}_E \in \text{Com}(H)$. Mais λ est une valeur propre de u, donc $u - \lambda \text{Id}_E$ n'est pas inversible. Or d'après la question précédente, $\text{Com}(H)$ est inversible, donc $u - \lambda \text{Id}_E = 0$, puis $u \in \mathbb{C}\text{Id}_E$.
Réciproquement, si $u \in \mathbb{C}\text{Id}_E$, alors u commute avec tout endomorphisme,

donc $u \in \mathrm{Com}(H)$. On a donc montré que $\mathrm{Com}(H) = \mathbb{C}\mathrm{Id}_E$.

Partie 3 : Idéaux minimaux

12°)
12.a) $H \neq \{0\}$, donc il existe $h_0 \in H$ tel que $h_0 \neq 0$.
Alors, il existe $x_0 \in E$ tel que $h_0(x_0) \neq 0$.

12.b) $\diamond$ Soit $h, h' \in H$ et $\alpha \in \mathbb{K}$.
Alors $R(\alpha h + h') = (\alpha h + h')(V) = \alpha h(V) + h'(V) = \alpha R(h) + R(h')$. Ainsi, R est bien une application linéaire de H dans E.
$\diamond$ $R(h_0) = h_0(V) = h_0(x_0) - h_0 p(x_0)$, or $h_0 \in H$, donc par hypothèse, $h_0 p = 0$. Ainsi, $R(h_0) = h_0(x_0) \neq 0$, ce qui prouve que $R \neq 0$.
$\diamond$ Soit $x \in \mathrm{Im}(R)$ et $a \in A$. Il existe $h \in H$ tel que $x = R(h) = h(V)$.
Alors $a(x) = (ah)(V) = R(ah)$, ce qui a un sens car, H étant un idéal, $ah \in H$. Ainsi, $a(x) \in \mathrm{Im}(R)$, donc $a(\mathrm{Im}(R)) \subset \mathrm{Im}(R)$, pour tout $a \in A$, ce qu'il fallait démontrer.
$\diamond$ $\mathrm{Ker}(R)$ est un sous-espace vectoriel de H.
Soit $a \in A$ et $h \in \mathrm{Ker}(R)$. Alors $R(ah) = (ah)(V) = a(h(V)) = a(R(h))$, or $R(h) = 0$, donc $R(ah) = 0$ et $ah \in \mathrm{Ker}(R)$. Ainsi, $\mathrm{Ker}(R)$ est un idéal de A.

12.c) $\mathrm{Im}(R)$ est un sous-espace vectoriel de E stable par A, or A est irréductible, donc $\mathrm{Im}(R) \in \{\{0\}, E\}$, or R est non nulle, donc $\mathrm{Im}(R) = E$.
$\mathrm{Ker}(R)$ est un idéal de A inclus dans H, or H est un idéal minimal,
donc $\mathrm{Ker}(R) \in \{\{0\}, H\}$, mais R est non nulle, donc $\mathrm{Ker}(R) = \{0\}$.
En conclusion, R est un isomorphisme de H dans E.

12.d) $\diamond$ On a posé $V = x_0 - p(x_0)$, donc $p(V) = p(x_0) - p^2(x_0) = 0$,
car p est un projecteur.

Posons $F = R^{-1}$: F est un isomorphisme de E dans H.
$\diamond$ Soit $a \in A$.
Pour tout $h \in H$, $a(R(h)) = a(h(V)) = (ah)(V) = R(ah)$, donc $F(a(R(h))) = ah$.
Soit $X \in E$. Alors $F(X) \in H$, donc on peut utiliser l'égalité précédente en remplaçant h par $F(X)$. On obtient que $a\ F(X) = F(a(RF(X))) = F(a(X))$, car $RF = \mathrm{Id}_E$.
$\diamond$ Soit $X \in E$: Posons à nouveau $h = F(X) \in H$.
Alors $F(X)(V) = h(V) = R(h) = R(F(X)) = X$.

13°)
13.a) Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Pour tout $X \in E$, $F_j(X)(V_j) = X$,
donc en particulier, $F_j(V_j)(V_j) = V_j$.

13.b) Soit $j, k \in \{1, \ldots, n\}$ et $X \in E$.
Pour tout $a \in A$, $aF_j(V_j) = F_j(a(V_j))$, donc avec $a = F_k(X)$,
on obtient que $F_k(X)\ F_j(V_j) = F_j(F_k(X)(V_j)) = F_j(\delta_{j,k} X) = \delta_{j,k} F_j(X)$.

13. c) Lorsque $k \neq j$, on en déduit que $F_k(V_k)\ F_j(V_j) = 0$.

Ainsi, $p^2 = \displaystyle\sum_{1 \leq j,k \leq n} F_k(V_k)\ F_j(V_j) = \sum_{j=1}^{n} F_j(V_j)^2$.

De plus, toujours d'après le 13.b, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $F_j(V_j)\ F_j(V_j) = F_j(V_j)$, donc $p^2 = \sum_{j=1}^{n} F_j(V_j) = p$, ce qui prouve que p est un projecteur.

13.d) Soit $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $X \in E$. D'après la question 13.b,
$F_j(X)\ p = \sum_{k=1}^{n} F_j(X)\ F_k(V_k) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{j,k} F_k(X) = F_j(X)$.

De plus, $p(V_j) = \sum_{k=1}^{n} F_k(V_k)(V_j) = \sum_{k=1}^{n} \delta_{k,j} V_k = V_j$.

14°)

14.a) Si $\mathrm{Ker}(p) = \{0\}$, alors p est inversible, or $p^2 = p$, donc $p = \mathrm{Id}_E$, ce qui est faux. Ainsi, $\mathrm{Ker}(p) \neq \{0\}$ donc il existe $X_0 \in \mathrm{Ker}(p)$ tel que $X_0 \neq 0$.
Supposons que, pour tout $a \in A$, $a(X_0) = 0$. Alors pour tout $a \in A$,
$a(\mathbb{K}X_0) = \{0\} \subset \mathbb{K}X_0$, donc $\mathbb{K}X_0$ est un sous-espace vectoriel stable par A, mais A est irréductible, donc $\mathbb{K}X_0 \in \{\{0\}, E\}$, or $X_0 \neq 0$ donc $\mathbb{K}X_0 \neq \{0\}$. On en déduit que $\mathbb{K}X_0 = E$ ce qui est impossible car E est de dimension $N \geq 2$. Ainsi, il existe $a_0 \in A$ tel que $a_0(X_0) \neq 0$.

14.b) On vérifie aisément que $0 \in J$ et que J est stable par combinaison linéaire, donc J est un sous-espace vectoriel de A.
De plus, si $a \in J$ et $b \in A$, alors $bap = b.0 = 0$, donc $ba \in J$. Ceci montre que J est un idéal de A.
De plus $(a_0 - a_0 p)p = a_0 p - a_0 p^2 = 0$, car p est un projecteur.
De plus, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $F_j \in L(E, A)$, donc $F_j(V_j) \in A$. Mais A est un espace vectoriel, donc $p \in A$.
On en déduit que $a_0 - a_0 p \in J$, or $(a_0 - a_0 p)(X_0) = a_0(X_0) \neq 0$, donc $a_0 - a_0 p \neq 0$, ce qui prouve que $J \neq \{0\}$. Ainsi, J est un idéal non nul de A.
Notons $D = \{\dim(H)\ /\ H$ est un idéal non nul de A avec $H \subset J\}$. D contient $\dim(J)$, donc D est une partie non vide de $\mathbb{N}^*$. Notons m son minimum. Par construction de m, il existe un idéal H non nul de A inclus dans J de dimension m. Alors H est un idéal non nul minimal de A. En effet, si H' est un idéal de A inclus dans H, si H' est non nul, alors $\dim(H') \in D$, donc $\dim(H') \geq m$, mais $H' \subset H$, donc $\dim(H') \leq \dim(H) = m$. Ainsi, $H' = H$.

14.c) On a vu ci-dessus que $p \in A$. De plus, pour tout $h \in H$, $h \in J$, donc $hp = 0$. On est donc sous les hypothèses de la question 12. D'après le 12.d, il existe $F_{n+1} \in L(E, H)$ et $V_{n+1} \in E$ tels que $p(V_{n+1}) = 0$, pour tout $a \in A$ et $X \in E$, $a\ F_{n+1}(X) = F_{n+1}(a(X))$ et $F_{n+1}(X)(V_{n+1}) = X$.
Soit $j \in \mathbb{N}_n$ et $X \in E$. Il reste à vérifier que $F_j(X)(V_{n+1}) = 0$ et que $F_{n+1}(X)(V_j) = 0$.
Or d'après la question 13.d, $F_j(X) = F_j(X)p$,
donc $F_j(X)(V_{n+1}) = F_j(X)(p(V_{n+1})) = F_j(X)(0) = 0$.
De plus $F_{n+1} \in L(E, H)$, donc $F_{n+1}(X) \in H \subset J$, donc $F_{n+1}(X)p = 0$. Ainsi, $F_{n+1}(X)(V_j) = F_{n+1}(X)(p(V_j)) = (F_{n+1}(X)p)(V_j) = 0$.

15°) Notons R l'ensemble des $r \in \mathbb{N}$ tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$, des applications linéaires $F_1, \ldots, F_n$ de E dans A et des vecteurs $V_1, \ldots, V_n$ de E tels que, pour tout $X \in E$, pour tout $a \in A$, pour tout $j, k \in \{1, \ldots, n\}$, $a\ F_j(X) = F_j(a(X))$ et $F_j(X)(V_k) = \delta_{j,k}X$, avec de plus $\mathrm{rg}(p) = r$, où $p = \sum_{j=1}^{n} F_j(V_j)$.
Avec $n = 0$, l'existence des familles vides $(F_i)_{1\leq i\leq 0}$ et $(V_i)_{1\leq i\leq 0}$ est assurée et les propriétés souhaitées sont vraies, avec $p = 0$, donc $0 \in R$. Ainsi R est une partie non vide de $\mathbb{N}$, majorée par $\dim(E) = N$. R possède donc un maximum notée r_0. Supposons que $r_0 < N$. On est alors exactement dans la situation de la question 14. Avec les notations de cette question, posons $p' = p + F_{n+1}(V_{n+1})$. D'après la question 13, en remplaçant n par $n + 1$, p' est encore un projecteur et, par définition de R, $\mathrm{rg}(p') \in R$.
Or, on a vu en donnant la solution du 13.c que $F_{n+1}(V_{n+1})$ est un projecteur. p et p' sont aussi des projecteurs, donc d'après le cours,
$\mathrm{rg}(p') = \mathrm{Tr}(p') = \mathrm{Tr}(p)+\mathrm{Tr}(F_{n+1}(V_{n+1})) = \mathrm{rg}(p)+\mathrm{rg}(F_{n+1}(V_{n+1})) = r_0+\mathrm{rg}(F_{n+1}(V_{n+1}))$.
Supposons que $F_{n+1}(V_{n+1}) = 0$. Alors $0 = F_{n+1}(V_{n+1})(V_{n+1}) = V_{n+1}$, puis, pour tout $X \in E$, $X = F_{n+1}(X)(V_{n+1}) = F_{n+1}(X)(0) = 0$, donc $E = \{0\}$, ce qui est faux. Ainsi, $F_{n+1}(V_{n+1}) \neq 0$, donc $\mathrm{rg}(F_{n+1}(V_{n+1})) \geq 1$, puis $\mathrm{rg}(p') \geq r_0 + 1$, or $\mathrm{rg}(p') \in R$, donc $\mathrm{rg}(p') \leq r_0$. C'est contradictoire, donc $r_0 = N$. Ainsi, p est un projecteur de rang N, donc est inversible, or $p^2 = p$, donc $p = \mathrm{Id}_E$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) On vérifie aisément que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, pour tout $X \in E$, $G_j(X)$ est une application linéaire de E dans E, puis que G_j est une application linéaire de E dans $L(E)$.

16.a) Soit $u \in \mathrm{Im}(G_j)$: il existe $X \in E$ tel que $u = G_j(X)$.
Soit $a \in A$. Pour tout $Y \in E$,
$$\begin{aligned}(aG_j(X))(Y) &= a(F_j(Y)(X)) = (a\ F_j(Y))(X)\\ &= F_j(a(Y))(X) = G_j(X)(a(Y)) = (G_j(X)\ a)(Y),\end{aligned}$$
donc $aG_j(X) = G_j(X)a$, puis $ua = au$, ce qu'il fallait démontrer.

16.b) $\diamond$ Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Soit $a \in \mathrm{Com}(\mathrm{Im}(F_j))$. Soit $X \in E$.
$X = F_j(X)(V_j)$, donc $a(X) = (aF_j(X))(V_j)$, or $F_j(X) \in \mathrm{Im}(F_j))$,
donc $a(X) = (F_j(X)a)(V_j) = F_j(X)(a(V_j)) = G_j(a(V_j))(X)$.
On en déduit que $a = G_j(a(V_j)) \in \mathrm{Im}(G_j)$. Ainsi, $\mathrm{Com}(\mathrm{Im}(F_j)) \subset \mathrm{Im}(G_j)$.
$\diamond$ Soit $j \in \mathbb{N}_n$. F_j est une application linéaire de E dans A, donc $\mathrm{Im}(F_j) \subset A$. D'après la question 3, $\mathrm{Com}(A) \subset \mathrm{Com}(\mathrm{Im}(F_j)) \subset \mathrm{Im}(G_j)$, mais d'après 16.a, $\mathrm{Im}(G_j) \subset \mathrm{Com}(A)$, donc $\mathrm{Im}(G_j) = \mathrm{Com}(A)$.

16.c) Soit $b \in \mathrm{Com}^2(A)$. Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $b \in \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = \mathrm{Com}(\mathrm{Im}(G_j))$.
Soit $X \in E$. $(bF_j(V_j))(X) = b(F_j(V_j)(X)) = b(G_j(X)(V_j)) = (bG_j(X))(V_j)$, or b commute avec $G_j(X)$, donc $(bF_j(V_j))(X) = (G_j(X)b)(V_j) = G_j(X)(b(V_j)) = F_j(b(V_j))(X)$.
C'est vrai pour tout $X \in E$, donc $bF_j(V_j) = F_j(b(V_j))$.

16.d) Si $a \in A$ et $b \in \text{Com}(A)$, alors a et b commutent, donc $a \in \text{Com}^2(A)$.

Réciproquement, soit $b \in \text{Com}^2(A)$. Alors $b = b\text{Id}_E = b\sum_{j=1}^{n} F_j(V_j) = \sum_{j=1}^{n}(bF_j(V_j))$, donc d'après la question précédente, $b = \sum_{j=1}^{n} F_j(b(V_j)) \in A$, car les F_j sont à valeurs dans A, lequel est un espace vectoriel.

17°) $\diamond$ $L(E)$ est évidemment une algèbre de $L(E)$. Montrons qu'elle est irréductible.
Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par $L(E)$.
Ainsi, pour tout $u \in L(E)$, $u(F) \subset F$.
Supposons que $F \neq \{0\}$. Il existe donc $X_0 \in F$ avec $X_0 \neq 0$. On complète X_0 en une base $(X_0, \ldots, X_{N-1})$ de E.
Soit $Y \in E$. D'après le cours, il existe un unique $u \in L(E)$ tel que $u(X_0) = Y$ et $u(X_i) = 0$ pour tout $i \in \{1, \ldots, N-1\}$.
$X_0 \in F$ et $u(F) \subset F$, donc $Y = u(X_0) \in F$, pour tout $Y \in E$. Ceci démontre que $F = E$. Ainsi les seuls sous-espaces stables par $L(E)$ sont $\{0\}$ et E, ce qui prouve que $L(E)$ est une algèbre irréductible de $L(E)$.
$\diamond$ Soit A une algèbre irréductible de $L(E)$. D'après la question précédente, $A = \text{Com}(\text{Com}(A))$, mais d'après la question 11, $\text{Com}(A) = \{\lambda\text{Id}_E \ / \ \lambda \in \mathbb{C}\}$, donc $A = \text{Com}(\mathbb{C}\text{Id}_E)$, or tout endomorphisme de E commute avec les homothéties, donc $A = L(E)$.

18°)
18.a) D'après la question 4, $\text{Com}(A)$ est une algèbre de $L(E)$.
En particulier, c'est sous-espace vectoriel de $L(E)$, donc c'est un groupe additif.
Id_E commute avec tout endomorphisme, donc $\text{Id}_E \in \text{Com}(A)$.
De plus, $\text{Com}(A)$ étant une algèbre, elle est stable pour le produit. Elle est également stable pour la différence, donc c'est un sous-anneau de $L(E)$.
$\text{Id}_E \neq 0$, donc $\text{Com}(A) \neq \{0\}$.
Par hypothèse, $\text{Com}(A)$ est commutatif.
Enfin, d'après la question 10, $\text{Com}(A)$ est inversible, donc pour tout $u \in \text{Com}(A) \setminus \{0\}$, $u^{-1} \in \text{Com}(A)$.
En conclusion, $\text{Com}(A)$ est un corps.

18.b) $\diamond$ Soit $u \in \text{Com}(A)$. la famille $(u^k)_{0 \le k \le N^2}$ est une famille de vecteurs de $L(E)$ de cardinal $N^2 + 1$ et $\dim(L(E)) = N^2$, donc c'est une famille liée. Ainsi, il existe $(\alpha_k)_{0 \le k \le N^2}$ une famille non nulle de réels tels que $\sum_{k=0}^{N^2} \alpha_k u^k = 0$. Ainsi, en posant $P(X) = \sum_{k=0}^{N^2} \alpha_k X^k$, on a $P(u) = 0$ et $P \neq 0$.
$\diamond$ $\mathbb{R}\text{Id}_E \subset \text{Com}(L(E)) \subset \text{Com}(A)$. Si $\mathbb{R}\text{Id}_E = \text{Com}(A)$, alors d'après 16.d,
$A = \text{Com}(\mathbb{R}\text{Id}_E) = L(E)$, ce qui est faux, donc il existe $u \in \text{Com}(A)$ tel que, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $u \neq \lambda\text{Id}_E$.

D'après le point précédent, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P \neq 0$ et $P(u) = 0$.
Écrivons la décomposition de P en produit de polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sous la forme $P = \prod_{i=1}^{n} P_i$ (les P_i sont irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ mais ne sont pas deux à deux distincts). Ainsi, $0 = P(u) = \prod_{i=1}^{n} P_i(u)$ (en effet, on sait que l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & L(E) \\ Q & \longmapsto & Q(u) \end{array}$ est un morphisme d'algèbres). Cependant, $\text{Com}(A)$ est une algèbre, donc pour tout $u \in \text{Com}(A)$, $P_i(u) \in \text{Com}(A)$. Mais $\text{Com}(A)$ est intègre, donc il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $P_i(u) = 0$. Quitte à diviser P_i par son coefficient dominant, on peut supposer que P_i est irréductible et unitaire.
Supposons que $\deg(P_i) = 1$. Alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $P_i = X - \alpha$, donc $0 = P_i(u) = u - \alpha \text{Id}_E$, ce qui est faux. Ainsi, $\deg(P_i) \geq 2$, or P_i est irréductible unitaire dans $\mathbb{R}[X]$, donc il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $P_i = X^2 + aX + b$ avec $\Delta = a^2 - 4b < 0$. Ainsi, $0 = u^2 + au + b\text{Id}_E = (u + \frac{a}{2}\text{Id}_E)^2 + (b - \frac{a^2}{4})\text{Id}_E$.
$b - \frac{a^2}{4} > 0$, donc on peut poser $J = \dfrac{1}{\sqrt{b - \frac{a^2}{4}}}\Big(u + \dfrac{a}{2}\text{Id}_E\Big)$.
Alors $J \in \text{Com}(A)$ et $J^2 = -\text{Id}_E$.

18.c) Soit $u \in \text{Com}(A)$. En reprenant le raisonnement précédent, on obtient qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $u = \alpha\text{Id}_E$, ou bien qu'il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $(u+\frac{a}{2}\text{Id}_E)^2+(b-\frac{a^2}{4})\text{Id}_E = 0$ avec $b-\frac{a^2}{4} > 0$. Dans le second cas, en posant $\lambda = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$, on a $(u+\frac{a}{2}\text{Id}_E)^2-(\lambda J)^2 = 0$, or $\text{Com}(A)$ est supposé commutatif, donc $(u + \frac{a}{2}\text{Id}_E - \lambda J)(u + \frac{a}{2}\text{Id}_E + \lambda J) = 0$. Le corps $\text{Com}(A)$ est intègre, donc il existe $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ tel que $u = -\frac{a}{2}\text{Id}_E + \varepsilon\lambda J$.
Ceci démontre que $\text{Com}(A) \subset \text{Vect}(\text{Id}_E, J)$. L'inclusion réciproque est claire.
Lorsque $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$, posons $\varphi(z) = \alpha\text{Id}_E + \beta J$. On définit ainsi une application φ de $\mathbb{C}$ dans $\text{Com}(A)$, surjective d'après ce qui précède.
Soit $z = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ et $z' = \alpha' + i\beta' \in \mathbb{C}$.
On vérifie facilement que $\varphi(1) = \text{Id}_E$ et que $\varphi(z + z') = \varphi(z) + \varphi(z')$. De plus, $\varphi(z)\varphi(z') = (\alpha\text{Id}_E + \beta J)(\alpha'\text{Id}_E + \beta' J) = (\alpha\alpha' - \beta\beta')\text{Id}_E + (\alpha\beta' + \alpha'\beta)J = \varphi(zz')$, donc φ est un morphisme de corps. À ce titre, il est injectif. Ainsi, φ est un isomorphisme du corps $\mathbb{C}$ sur le corps $\text{Com}(A)$.

18.d) $\diamond$ Pour tout $x \in E$ et $z \in \mathbb{C}$, posons $z.x = \varphi(z)(x)$.
Lorsque $z \in \mathbb{R}$, $\varphi(z) = z\text{Id}_E$, donc $z.x$ est le produit du réel z par le vecteur x, selon la structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de E, dont on dispose déjà. En particulier, pour tout $x \in E$, $1.x = x$.
De plus, on vérifie facilement que, pour tout $z, z' \in \mathbb{C}$, pour tout $x, y \in E$, $(z + z').x = \varphi(z + z')(x) = (z.x) + (z'.x)$, $z.(x + y) = \varphi(z)(x + y) = (z.x) + (z.y)$ et $z.(z'.x) = \varphi(z)(\varphi(z')(x)) = [\varphi(z)\varphi(z')](x) = \varphi(zz')(x) = (zz').x$.
Ainsi, on a muni E d'une structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel.
$\diamond$ Notons $L_{\mathbb{C}}(E)$ l'ensemble des $\mathbb{C}$-endomorphismes de E.
Soit $a \in A$. Soit $z \in \mathbb{C}$ et $x \in E$: $a(z.x) = a(\varphi(z)(x)) = [a\ \varphi(z)](x)$,

or $\varphi(z) \in \mathrm{Com}(A)$, donc $a(z.x) = [\varphi(z)a](x) = \varphi(z)(a(x)) = z.a(x)$. De plus a reste additive, donc $a \in L_{\mathbb{C}}(E)$. Ainsi $A \subset L_{\mathbb{C}}(E)$.
$\diamond$ Soit $a \in A$ et $z \in \mathbb{C}$. Pour tout $x \in E$, $(z.a)(x) = z.(a(x))$, par définition de la structure de $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $L_{\mathbb{C}}(E)$, donc $(z.a)(x) = \varphi(z)(a(x)) = [\varphi(z)a](x)$. Ainsi, $z.a = \varphi(z)a$.
Soit $b \in \mathrm{Com}(A)$. Alors b commute avec a et b commute avec $\varphi(z)$ (car $\varphi(z) \in \mathrm{Com}(A)$ et car $\mathrm{Com}(A)$ est supposé commutatif), donc b commute avec $\varphi(z)a = z.a$. On en déduit que $z.a \in \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = A$, donc A est un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de $L_{\mathbb{C}}(E)$. On en déduit que A est une algèbre de $L_{\mathbb{C}}(E)$.
Soit F un $\mathbb{C}$-sous-espace vectoriel de E stable par A. C'est en particulier un $\mathbb{R}$-sous-espace vectoriel stable par A, donc $F \in \{\{0\}, E\}$. Ainsi, A est une $\mathbb{C}$-algèbre irréductible de $L_{\mathbb{C}}(E)$.
$\diamond$ E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie, donc il possède une $\mathbb{R}$-base, laquelle est clairement $\mathbb{C}$-génératrice. Ainsi, E est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Notons $M = \dim_{\mathbb{C}}(E)$. $E \neq \{0\}$, donc $M \geq 1$.
Si $M \geq 2$, on peut utiliser la question 17 et affirmer que $A = L_{\mathbb{C}}(E)$.
Supposons maintenant que $M = 1$. $\mathrm{Id}_E \in \mathrm{Com}(L_{\mathbb{R}}(E)) \subset \mathrm{Com}(\mathrm{Com}(A)) = A$, donc $\mathbb{C}\mathrm{Id}_E \subset A$. Or $\dim_{\mathbb{C}}(L_{\mathbb{C}}(E)) = \dim_{\mathbb{C}}(E)^2 = 1$, donc $\mathbb{C}\mathrm{Id}_E = L_{\mathbb{C}}(E)$. On a donc encore $A = L_{\mathbb{C}}(E)$.