Feuille d'exercices 23.
Corrigé de quelques exercices

Exercice 23.9 :

1°) Il existe $a \in \mathbb{R}^3$ tel que $u^{p-1}(a) \neq 0$.

Soit $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{p-1}) \in \mathbb{R}^p$ tel que $\sum_{k=0}^{p-1} \alpha_k u^k(a) = 0$.

Supposons qu'il existe $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ tel que $\alpha_k \neq 0$.

Notons alors $m = \min\{k \in \{0, \ldots, p-1\} / \alpha_k \neq 0\}$. On a $0 = \sum_{k=m}^{p-1} \alpha_k u^k(a)$. Composons cette égalité par u^{p-1-m}. On obtient seulement $0 = \alpha_m u^{p-1}(a)$, ce qui est impossible car $\alpha_m \neq 0$ et $u^{p-1}(a) \neq 0$. Ainsi, pour tout $k \in \{0, \ldots, p-1\}$ $\alpha_k = 0$, ce qui prouve que la famille $(a, u(a), \ldots, u^{p-1}(a))$ est libre.

2°) $p \geq 1$ car $A^0 = I_3$ et $p \leq 3$ car une famille libre en dimension 3 est de cardinal inférieur à 3.

3°) a) Si $p = 3$, la famille de la question 1 est une base dans laquelle la matrice de u vaut $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donc cette dernière matrice est semblable à A. .

Si $p = 1$, $A = 0$: tous ses coefficients sont dans $\{0, 1\}$.

b) Supposons que $p = 2$: $A^2 = 0$, donc $Im(A) \subset Ker(A)$.

En notant r le rang de A, d'après le formule du rang, on a $r \leq 3 - r$, donc $r = 1$ (car $A \neq 0$) et $dim(Ker(A)) = 2$.

Il existe e_3 tel que $Im(A) = Vect(e_3)$, et il existe $e_1 \in \mathbb{R}^3$ tel que $e_3 = u(e_1)$. On complète (e_3) en une base (e_2, e_3) de $Ker(A)$.

On vérifie que $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base : en effet, si $a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 = 0$, en composant par u, $a_1e_3 = 0$, donc $a_1 = 0$, puis $a_2 = a_3 = 0$ car (e_2, e_3) est libre.

Ainsi A est semblable à $mat(u, e) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 23.20 :

1°) Lorsque $B \in G$, l'application $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & BA \end{array}$ est une bijection, de bijection réciproque $\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & G \\ A & \longmapsto & B^{-1}A \end{array}$, donc par changement de variable, $Bp = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} BA = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} A = p$.

On en déduit que $p^2 = \Big[\frac{1}{m}\sum_{B\in G} B\Big]p = \frac{1}{m}\sum_{B\in G} p = p$, donc p est bien un projecteur.

2°) D'après le cours, $\text{rg}(p) = \text{Tr}(p)$, or l'opérateur Tr est linéaire,
donc $\text{rg}(p) = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} \text{Tr}(A)$.

Pour conclure, il suffit donc de montrer que $\text{Im}(p) = \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$:

Si $X \in \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$, pour tout $A \in G$, $AX = X$,
donc $pX = \frac{1}{m}\sum_{A\in G} AX = X$ et $X \in \text{Im}(p)$.

Réciproquement, supposons que $X \in \text{Im}(p)$ et soit $A \in G$.
Alors $p(X) = X$ (car p est un projecteur), donc $AX = ApX = pX = X$ car on vu en première question que $Bp = p$ pour tout $B \in G$. Ainsi, $X \in \bigcap_{A\in G} Ker(A - I_n)$.

Exercice 23.22 :

1°) D'après le cours, pour un corps de caractéristique nulle, lorsque $\deg(P) \geq 1$, $\deg(D(P)) = \deg(P) - 1$ et lorsque $\deg(P) \leq 0$, $\deg(D(P)) = -\infty$.

2°) D'après la question précédente, les $\mathbb{K}_n[X]$ sont stables par D. De plus ils sont non nuls et de dimensions finies. Réciproquement, soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$, non nul et de dimension finie.
F admet au moins une base, notée $(P_i)_{0\leq i\leq k}$. Posons $n = \max_{0\leq i\leq k} \deg(P_i)$.
Alors $F \subset \mathbb{K}_n[X]$.
Notons P l'un des polynômes de la famille $(P_i)_{0\leq i\leq k}$ qui est de degré n.
F étant stable par D, F contient la famille $b = (D^i(P))_{0\leq i\leq n}$, donc $\text{Vect}(b) \subset F$, or b est une famille de polynômes de degrés étagés, donc on sait qu'elle constitue une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Ainsi, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$.
On a donc montré que $F = \mathbb{K}_n[X]$.

3°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. F n'est pas inclus dans $\mathbb{K}_{n-1}[X]$, donc il existe $P \in F$ tel que $\deg(P) \geq n$. Posons $k = \deg(P)$. Alors la famille $b = (D^i(P))_{0\leq i\leq k}$ est une base de $\mathbb{K}_k[X]$, donc pour les mêmes raisons qu'en question 2, $\mathbb{K}_k[X] = \text{Vect}(b) \subset F$. En particulier, $\mathbb{K}_n[X] \subset F$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $F = \mathbb{K}[X]$. La réciproque étant claire, $\mathbb{K}[X]$ est le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ stable par D et de dimension infinie.

4°)

◇ On fixe $n \in \mathbb{N}^*$. Notons $b = \left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \le i \le n-1}$.
b est une base de $\mathbb{K}_{n-1}[X]$. Pour la suite, on pose $E = \mathbb{K}_{n-1}[X]$.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $D\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = \dfrac{X^{i-1}}{(i-1)!}$, donc $\text{mat}(D, b) = J$.
Notons u l'unique application linéaire de E dans $\mathbb{K}^n$ telle que, pour tout $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, $u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_i$, où $c = (c_0, \ldots, c_{n-1})$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
u envoie une base sur une base, donc c'est un isomorphisme.
Pour tout $i \in \{1, \ldots, n-1\}$, $uDu^{-1}(c_i) = uD\left(\dfrac{X^i}{i!}\right) = c_{i-1}$ et $uDu^{-1}(c_0) = 0$, donc $\text{mat}(uDu^{-1}, c) = J$, ce qui prouve que uDu^{-1} est l'endomorphisme canoniquement associé à J, que l'on notera encore J.
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Notons (C) la condition "F est stable par J".
Ainsi, $(C) \iff J(F) \subset F \iff uDu^{-1}(F) \subset F \iff D(u^{-1}(F)) \subset u^{-1}(F)$. Alors d'après la question 2, $(C) \iff \exists k \in \{0, \ldots, n-1\},\ u^{-1}(F) = \mathbb{K}_k[X]$,
or $u(\mathbb{K}_k[X]) = u\left(\text{Vect}\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \le i \le k}\right) = \text{Vect}\left(u\left(\dfrac{X^i}{i!}\right)_{0 \le i \le k}\right) = \text{Vect}((c_i)_{0 \le i \le k})$. Ainsi, on a montré que les sous-espaces vectoriels non nuls de $\mathbb{K}^n$ stables par J sont exactement les $\text{Vect}((c_i)_{0 \le i \le k}$, pour $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
◇ On peut retrouver ce résultat directement :
Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ stable par J. Notons $p = \dim(F)$.
On sait démontrer que, pour tout $k \in \{0, \ldots, n\}$, $J^k = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-k} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (décomposition par blocs selon la partition de n suivante : $n = k + (n-k)$). En particulier, $J^n = 0$.
Notons $f = J|_F^F$. On vérifie alors que $f^n = 0$, donc f est un endomorphisme nilpotent sur un espace vectoriel de dimension p. On sait alors montrer que $f^p = 0$. On en déduit que $F \subset \text{Ker}(J^p)$, or $J^p = \begin{pmatrix} 0 & I_{n-p} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, donc $\text{Ker}(J^p) = \text{Vect}(c_0, \ldots, c_{p-1})$, donc $F \subset \text{Vect}(c_0, \ldots, c_{p-1})$, mais ces deux sous-espaces vectoriels ont la même dimension, ce qui conclut.

Exercice 23.23 :

1°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont dans $\mathbb{R}_+^*$.
Notons $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, la $i^{\text{ème}}$ composante de Me vaut $\sum_{j=1} m_{i,j} = 1$, donc $M \in \mathcal{E} \iff Me = e$.
Mais e est non nul, donc si $M \in \mathcal{E}$ alors 1 est une valeur propre de M.

2°) Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}$, le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient de MN vaut $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k} n_{k,j}$, donc les coefficients de MN sont strictement positifs.

$MNe = M(Ne) = Me = e$, donc $MN \in \mathcal{E}$.

3°) Soient $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$ et $\lambda \in Sp_{\mathbb{C}}(M)$.

Il existe $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$.

Soit $i \in \mathbb{N}_n$. Egalons les $i^{\text{èmes}}$ composantes dans la relation précédente : $\sum_{j=1}^{n} m_{i,j} x_j = \lambda x_i$.

D'après l'inégalité triangulaire, en tenant compte du fait que les coefficients de M sont dans $\mathbb{R}_+$, $(1)\ :\ |\lambda||x_i| \leq \sum_{j=1}^{n} m_{i,j}|x_j|$.

Posons $x = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $x = |x_{i_0}|$.

L'inégalité (1) pour $i = i_0$ implique $|\lambda| x \leq x \sum_{j=1}^{n} m_{i,j} = x$, or $x > 0$ car $X \neq 0$, donc $|\lambda| \leq 1$.

4°) Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{E}$. Soit $\lambda \in Sp(M)$ telle que $|\lambda| = 1$.

Il existe $X \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ tel que $MX = \lambda X$. Il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que $|x_{i_0}| = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|$.

Alors, $|x_{i_0}| = |\lambda x_{i_0}| = \Big| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} x_j \Big| \overset{(1)}{\leq} \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} |x_j| \overset{2)}{\leq} |x_{i_0}| \sum_{j=1}^{n} M_{i_0,j} = |x_{i_0}|$. On retrouve la même quantité $|x_{i_0}|$ à gauche et à droite de cette succession d'inégalités, donc toutes ces inégalités sont des égalités.

Ainsi, d'après (2), pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $|x_j| = |x_{i_0}|$, ainsi le module de x_j ne dépend pas de j.

Et d'après (1), on est dans le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire, donc il existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $M_{i_0,j} x_j \in \mathbb{R}_+ e^{i\theta_0}$, donc l'argument de x_j ne dépend pas de j.

On en déduit que X est colinéaire à $\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc que $\lambda = 1$.

Ceci démontre en outre que $E_1^M = \text{Vect} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc si l'on suppose de plus que M est diagonalisable, alors M est semblable à $D = \text{diag}(1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$, avec $|\lambda_i| < 1$ pour tout $i \geq 2$, donc M^p tend lorsque p tend vers $+\infty$ vers une matrice semblable à $D = \text{diag}(1, 0, \ldots, 0)$.

Exercice 23.24 :

1°)
◇ Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \text{Ker}(u^k)$, $u^{k+1}(x) = u(u^k(x)) = u(0) = 0$, donc la suite $(\text{Ker}(u^k))_{0 \leq k \leq p}$ est croissante.
◇ Supposons qu'il existe $q < p$ tel que $\text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^{q+1})$. Alors, pour tout $x \in E$ et $k \in \mathbb{N}$, $u^{q+k+1}(x) = 0 \iff u^k(x) \in \text{Ker}(u^{q+1}) \iff u^k(x) \in \text{Ker}(u^q) \iff u^{k+q}(x) = 0$, donc la suite $(\text{Ker}(u^k))_{k \geq q}$ est constante. En particulier, $\text{Ker}(u^q) = \text{Ker}(u^p) = E$, donc $u^q = 0$, ce qui est contraire à la définition de p. Ainsi, la suite $(\text{Ker}(u^k))_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante.
◇ Pour tout $k \in \mathbb{N}$, notons d_k la dimension de $\text{Ker}(u^k)$. Alors $(d_k)_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante, donc par récurrence, on en déduit que $d_k \geq k$ pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$. En particulier, $p \leq d_p$, or d_p est la dimension d'un sous-espace vectoriel de E, donc $d_p \leq n$. En conclusion, $p \leq n$.

2°) On construit une base e de E adaptée à la succession d'inclusions strictes
$\{0\} \subset \text{Ker}(u) \subset \text{Ker}(u^2) \subset \cdots \subset \text{Ker}(u^p) = E$, c'est-à-dire que si $(e_1, \ldots, e_{i_k})$ est une base de $\text{Ker}(u^k)$, on la complète en une base $(e_1, \ldots, e_{i_{k+1}})$ de $\text{Ker}(u^{k+1})$.
Soit $i \in \mathbb{N}_n$. En convenant que $i_0 = 0$, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $i_k < i \leq i_{k+1}$. Alors $e_i \in \text{Ker}(u^{k+1})$, donc $u(e_i) \in \text{Ker}(u^k) = \text{Vect}(e_j)_{1 \leq j \leq i_k}$. Ceci prouve que $\text{mat}(u, e)$ est triangulaire supérieure stricte.

3°) Si M est une matrice nilpotente, il existe une base e de $\mathbb{K}^n$ telle que $\text{mat}(\tilde{M}, e)$ est triangulaire supérieure stricte, donc M est semblable à une telle matrice.
Réciproquement, supposons que M est semblable à une matrice triangulaire supérieure dont les coefficients diagonaux sont tous nuls. Il existe une base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ dans laquelle $\text{mat}(\tilde{M}, e)$ est triangulaire supérieure stricte. Notons $u = \tilde{M}$. Ainsi, pour tout $j \in \mathbb{N}_n$, $u(e_j) \in \text{Vect}(e_k)_{1 \leq k \leq j-1}$.
Par récurrence sur h, on montre que, pour tout $h \in \mathbb{N}_n$, pour tout $j \in \{1, \ldots, h\}$, $u^h(e_j) = 0$ et pour tout $j \in \{h+1, \ldots, n\}$, $u^h(e_j) \subset \text{Vect}(e_k)_{1 \leq k \leq j-h}$. En particulier, $u^n = 0$, donc M est nilpotente.

4°) Soit $k \in \mathbb{N}_{p-1}$. Posons $v = u|_{\text{Ker}(u^{k+1})}^{\text{Ker}(u^k)}$: v est bien définie car si $x \in ker(u^{k+1})$, alors $u(x) \in \text{Ker}(u^k)$.
Il existe un sous-espace vectoriel F tel que $F \oplus \text{Ker}(u^k) = \text{Ker}(u^{k+1})$. Montrons que $v(F) \cap \text{Ker}(u^{k-1}) = \{0\}$: en effet, soit $y \in v(F) \cap \text{Ker}(u^{k-1})$: il existe $x \in F$ tel que $y = u(x)$. De plus, $y \in \text{Ker}(u^{k-1})$, donc $0 = u^{k-1}(y) = u^k(x)$.
Ainsi, $x \in F \cap \text{Ker}(u^k) = \{0\}$, donc $x = 0$, puis $y = 0$, ce qu'il fallait démontrer.
On peut donc écrire $\text{Ker}(u^k) \supset v(F) \oplus \text{Ker}(u^{k-1})$. En passant aux dimensions, on obtient que $\dim(v(F)) + d_{k-1} \leq d_k$, donc $\dim(v(F)) \leq d_k - d_{k-1}$.
De plus, $\text{Ker}(v|_F) = \text{Ker}(u|_F) = \text{Ker}(u) \cap F \subset \text{Ker}(u^k) \cap F = \{0\}$, donc $v|_F$ est injective. On en déduit que $\dim(v(F)) = \dim(F) = d_{k+1} - d_k$. Finalement, on a montré que $d_{k+1} - d_k \leq d_k - d_{k-1}$.