Feuille d'exercices 24.
Déterminants

Exercice 24.1 : (niveau 1)
Soit $\mathbb{K}$ un corps de caractéristique différente de 2 et n un entier naturel impair.
Montrer que toute matrice antisymétrique de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est de déterminant nul.

Exercice 24.2 : (niveau 1)
Soient α, β et γ trois réels. Montrez que :

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ 1 & \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ 1 & \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix} = -16\sin^2\frac{\alpha}{2}\sin^2\frac{\beta}{2}\sin^2\frac{\gamma}{2}.$$

Exercice 24.3 : (niveau 1)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On note V l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de la forme
$x \longmapsto e^x P(x)$, où P est une application polynomiale de degré inférieur à n.

1°) Montrer que V est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et préciser sa dimension.

2°) Si l'on pose, pour tout $f \in V$, $D(f) = f'$, montrer que $D \in L(V)$
et calculer $\det(D)$.

Exercice 24.4 : (niveau 1)
Soient A et B deux matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On suppose que $det(A)$ et $det(B)$ sont premiers entre eux. Montrer qu'il existe deux matrices U et V de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, telles que $UA + VB = I_n$.

Exercice 24.5 : (niveau 2)
On pose $M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

Déterminer $Q \in GL_3(\mathbb{R})$ telle que $M = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} Q^{-1}$.

Exercice 24.6 : (niveau 2)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. Calculer le déterminant de la matrice de taille n dont le $(i,j)^{\text{ème}}$ coefficient vaut $|i-j|$.

Exercice 24.7 : (niveau 2)
Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n et $u \in L(E)$.

1°) Montrer que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$.

2°) Montrer que $\det_{\mathbb{R}}(u) = |\det_{\mathbb{C}}(u)|^2$.

Exercice 24.8 : (niveau 2)
Soit A une matrice carrée de taille n à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$.
Déterminer le rang de ${}^t Cof(A)$ en fonction de celui de A.

Exercice 24.9 : (niveau 2)
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
Soit $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ et $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$.
On note $M_n = \begin{pmatrix} \lambda_1 & a & \cdots & a \\ b & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ b & \cdots & b & \lambda_n \end{pmatrix}$.
Calculer $det(M_n)$. *Indication :* Etudier le polynôme défini par $P(x) = det(M_n + xJ)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, où J est la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1.

Exercice 24.10 : (niveau 2)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Montrer que le déterminant
$\begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \cdots & a_0^{n-1} & a_0^{n+1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} & a_1^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} & a_n^{n+1} \end{vmatrix}$ est égal à $\left(\sum_{i=0}^{n} a_i \right) \prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$.

Exercice 24.11 : (niveau 2)
$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. n désigne un entier supérieur ou égal à 2.

1°) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est un ouvert de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

2°) Montrer que l'application $M \longmapsto M^{-1}$ est continue sur $GL_n(\mathbb{K})$.

3°) Montrer que $GL_n(\mathbb{K})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 24.12 : (niveau 2)
Soit p un entier strictement positif. Les éléments de $\mathbb{Z}^p$ sont notés sous la forme de vecteurs colonnes à p lignes. Montrer que φ est un automorphisme du groupe $(\mathbb{Z}^p, +)$ si et seulement s'il existe une matrice $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ telle que
◇ pour tout $X \in \mathbb{Z}^p$, $\varphi(X) = AX$,
◇ les coefficients de A sont des entiers relatifs
◇ et $det(A) = \pm 1$.

Exercice 24.13 : (niveau 2)
Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$, dont les degrés, notés m et n, sont strictement positifs. On notera $P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{n} b_k X^k$.
Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

i) P et Q admettent une racine commune.
ii) Le degré de $P \wedge Q$ est strictement positif.
iii) Il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{C}[X]$, non nuls, tels que $deg(A) \leq n-1$, $deg(B) \leq m-1$ et $AP + BQ = 0$.
iv) La famille $(P, XP, \ldots, X^{n-1}P, Q, XQ, \ldots, X^{m-1}Q)$ est liée.
v) $det(M) = 0$, où $M = (\alpha_{i,j}) \in \mathcal{M}_{n+m}(\mathbb{C})$ est définie par les relations suivantes :

- Si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, m\}$, on convient que $a_k = 0$.
- De même, si $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0, \ldots, n\}$, on convient que $b_k = 0$.
- Pour tout $j \in \mathbb{N}_n$ et $i \in \mathbb{N}_{n+m}$, $\alpha_{i,j} = a_{i-j}$.
- Pour tout $j \in \{n+1, \ldots, n+m\}$ et $i \in \mathbb{N}_{n+m}$, $\alpha_{i,j} = b_{i-j+n}$.

Exercice 24.14 : (niveau 3)
On désigne par $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ une famille de n vecteurs de $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

1°) Montrer que s'il existe une famille de n réels $(x_1, \ldots, x_n)$ telle que $det\left[\Big((f_i(x_j)\Big)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}}\right] \neq 0$, alors f est une famille libre.

2°) Montrer la réciproque, par exemple en raisonnant par récurrence.

Exercice 24.15 : (niveau 3)
Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, elles le sont dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Indication : Il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $PA = BP$ ...

Exercices supplémentaires

Exercice 24.16 : (niveau 1)
Calculer le déterminant $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{vmatrix}$.

Exercice 24.17 : (niveau 1)
Soit $(a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice carrée de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à valeurs dans un corps $\mathbb{K}$.
Comparer $\det((a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$ et $\det(((-1)^{i+j}a_{i,j})_{1\leq i,j\leq n})$.

Exercice 24.18 : (niveau 1)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice $(\alpha^{|i-j|})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}$.

Exercice 24.19 : (niveau 1)
Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
On suppose qu'il existe $f \in L(E)$ tel que $f^2 = -Id_E$.
Montrer que n est pair.

Exercice 24.20 : (niveau 1)
Montrez que $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix} = (a+b+c)^3$.

Exercice 24.21 : (niveau 1)
Soit $\alpha \in \mathbb{C}$. Calculer le déterminant de la matrice d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à $1+\alpha$, les autres coefficients étant tous égaux à 1.

Exercice 24.22 : (niveau 1)
Montrer que $\begin{vmatrix} 1 & \sin\alpha & \cos\alpha \\ 1 & \sin\beta & \cos\beta \\ 1 & \sin\gamma & \cos\gamma \end{vmatrix} = -4\sin\frac{\gamma-\beta}{2}\sin\frac{\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$.

Exercice 24.23 : (niveau 1)
Rechercher les éléments propres de la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Exercice 24.24 : (niveau 1)
Soit m et n deux entiers non nuls tels que $m > n$.
Soit $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{C})$ et $B \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{C})$: Calculer $det(AB)$.

Exercice 24.25 : (niveau 1)
Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. On appelle comatrice de M la matrice notée $\mathrm{Com}(M)$ dont le (i,j)-ième coefficient est égal au cofacteur de M de position (i,j).
Calculer $\det(\mathrm{Com}(M))$ en fonction de $\det(M)$.

Exercice 24.26 : (niveau 2)
Soit $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ $2n$ réels.
Calculer le déterminant $\begin{vmatrix} a_1+b_1 & b_1 & \cdots & \cdots & b_1 \\ b_2 & a_2+b_2 & b_2 & \cdots & b_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ b_{n-1} & \cdots & b_{n-1} & \ddots & b_{n-1} \\ b_n & \cdots & \cdots & b_n & a_n+b_n \end{vmatrix}$.

Exercice 24.27 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ deux familles de réels.
On note $A = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, où pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $m_{i,j} = \begin{cases} a_i + b_i & \text{si } i = j \\ a_i & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

1°) Calculer le déterminant de A.

2°) On suppose que $b_1 < b_2 < \cdots < b_n$ et que, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $a_i > 0$.
Montrer que A est diagonalisable.

Exercice 24.28 : (niveau 2)
Soient n un entier supérieur ou égal à 3 et x un réel non nul.

1°) Calculer le déterminant de la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients diagonaux sont nuls et dont les autres coefficients sont tous égaux à x.

2°) Calculer le déterminant de la matrice $A = (a_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par les relations suivantes : pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_{i,i} = 0$, pour tout $k \in \{2, \ldots, n\}$, $a_{1,k} = a_{k,1} = 1$, et tous les autres coefficients de A sont égaux à x.

Exercice 24.29 : (niveau 2)
Soit n un entier plus grand que 2. Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ telle que $AB = BA$.
Montrer que $det(A^2 + B^2) \geq 0$ (on pourra utiliser la matrice $A + iB$).
Si l'on ne suppose plus que A et B commutent, montrer que cette propriété peut être fausse.

Exercice 24.30 : (niveau 2)

1°) Dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, diagonaliser la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2°) Calculer les puissances de M.

Exercice 24.31 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On note $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n-1}$ et on définit la matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ sous la forme par blocs suivante : $A = \begin{pmatrix} 2i\sqrt{n-1} & {}^t v \\ v & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$, où $0_{n-1,n-1}$ désigne la matrice carrée nulle de taille $n-1$.

1°) Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.

2°) Trigonaliser A.

Exercice 24.32 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A = (A_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que ${}^tA = -A$.

1°) Si n est impair, montrer que $det(A) = 0$.

2°) Si n est pair, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $det(A) = det((A_{i,j} + x)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}})$.

Exercice 24.33 : (niveau 2)
On fixe $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. On considère sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une norme N pour laquelle deux matrices semblables ont toujours la même norme.

1°) Montrez que $\forall (A, B) \in GL_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\ \ N(AB) = N(BA)$.

2°) Montrez que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2\ \ N(AB) = N(BA)$.

3°) Déterminez deux matrices A et B dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB = 0$ et $BA \neq 0$.
Qu'en déduit-on ?

Exercice 24.34 : (niveau 2)
Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$,
$a_{i,j} \in \{-1, 1\}$. Montrer que $det(A) \in \mathbb{Z}$ et que 2^{n-1} divise $det(A)$.

Exercice 24.35 : (niveau 2)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n.
On fixe $u \in L(E)$ et e une base de E.
Montrer que, pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E^n$,

$$\sum_{i=1}^{n} det_e(x_1, \ldots, x_{i-1}, u(x_i), x_{i+1}, \ldots, x_n) = Tr(u) \times det_e(x).$$

Exercice 24.36 : (niveau 2)
Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1°) Soit $j \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $T_j \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos(jx) = T_j(\cos(x))$.
Préciser le degré de T_j et son coefficient dominant.

2°) Calculer le déterminant de la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient est égal à $\cos[(j - 1)x_i]$.

Exercice 24.37 : (niveau 2)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note $Com(M)$ la matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le $(i, j)^{\text{ème}}$ coefficient est le cofacteur de M de position (i, j).
Soit A une matrice $i$nversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Déterminer l'ensemble des matrices $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que $Com(X) = A$.

Exercice 24.38 : (niveau 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ et $(\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbb{C}^n$. On suppose que, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $\alpha_i + \beta_j \neq 0$. Calculer le déterminant de la matrice $\left(\dfrac{1}{\alpha_i + \beta_j}\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le n}}$ selon les deux méthodes suivantes :

1°) Effectuer des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes, en commençant par multiplier la $i^{\text{ème}}$ ligne par $\alpha_i + \beta_1$, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.

2°) Déterminer $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $\lambda \dfrac{\displaystyle\prod_{j=1}^{n-1}(X - \alpha_j)}{\displaystyle\prod_{j=1}^{n}(X + \beta_j)}$ se mette sous la forme

$\dfrac{1}{X + \beta_n} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n-1} \dfrac{a_j}{X + \beta_j}$ puis poursuivre ...

Exercice 24.39 : (niveau 3)
On fixe un entier $n \ge 1$.

1°) Si $(c_1, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et si $a_1, \dots, a_n$ sont n réels deux à deux distincts, montrer que la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k x}$ admet au plus $n - 1$ zéros.

2°) On fixe $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ n réels deux à deux distincts et $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$ $n-1$ réels deux à deux distincts. Pour tout $\beta_n \in \mathbb{R}$, on pose $f(\beta_n) = \mathrm{Det}((e^{\alpha_i \beta_j})_{1 \le i,j \le n})$.
Montrer que f est une fonction dont les zéros sont exactement les $\beta_1, \dots, \beta_{n-1}$.

3°) Soit $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ $2n$ réels tels que $\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots < \alpha_n$ et $\beta_1 < \beta_2 < \cdots < \beta_n$. Montrer que $\mathrm{Det}((e^{\alpha_i \beta_j})_{1 \le i,j \le n}) > 0$.

Exercice 24.40 : (niveau 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \{1, \dots, n\}$. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n, muni d'une base $e = (e_1, \dots, e_n)$. On note $e^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale de e.

1°) Soit $(k_1, \dots, k_p) \in \{1, \dots, n\}^p$ tel que $k_1 < \cdots < k_p$. Pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in E^p$, posons $\varphi(x_1, \dots, x_p) = \displaystyle\sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{p} x_{i,k_{\sigma(i)}}$, où $\mathcal{S}_p$ est l'ensemble des permutations de $\{1, \dots, p\}$, où $\varepsilon(\sigma)$ désigne la signature de la permutation σ et où $x_{i,j}$ désigne la $j^{\text{ème}}$ coordonnée de x_i dans la base e.
Montrer que φ est une forme p-linéaire alternée sur E.
Pour la suite, on notera $\varphi = e_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{k_p}^*$ et $A_p(E)$ désignera l'ensemble des formes p-linéaires alternées de E.

2°) Montrer que la famille $(e_{k_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{k_p}^*)_{1 \le k_1 < \cdots < k_p \le n}$ est une base de $A_p(E)$. Calculer la dimension de $A_p(E)$.