Résumé de cours :
Semaine 31, du 27 mai au 31.

Déterminants (suite et fin)

Notation. $\mathbb{K}$ désigne un corps quelconque.

1 Exemples de déterminants (suite et fin)

1.1 Déterminants tridiagonaux

Définition. Soient n un entier supérieur ou égal à 2 et $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
M est tridiagonale si et seulement si , pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $|i-j| \geq 2 \Longrightarrow m_{i,j} = 0$.

Propriété. Soit $M = (m_{i,j}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice tridiagonale. Pour tout $k \in \mathbb{N}_n$, notons M_k la matrice extraite de M en ne retenant que ses k premières colonnes et ses k premières lignes. Alors la suite $(\det(M_k))_{1\leq k\leq n}$ vérifie une relation de récurrence linéaire d'ordre 2.

1.2 Déterminants circulants

Définition. Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est circulante si et seulement si on passe de l'une de ses lignes à la suivante selon une permutation circulaire des coefficients vers la droite.

Méthode : Pour des matrices circulantes simples, on peut commencer par remplacer la première ligne par la somme de toutes les lignes. La première ligne devient alors colinéaire à $(1, 1, \ldots, 1)$. On peut ensuite effectuer des différences de colonnes pour placer des 0 sur la première ligne.

2 Le polynôme caractéristique

Notation. On fixe un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$.

2.1 Définition

Définition. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle polynôme caractéristique la quantité
$\chi_M = \det(XI_n - M)$. C'est le déterminant d'une matrice dont les coefficients sont dans le corps $\mathbb{K}(X)$.
χ_M est un élément de $\mathbb{K}[X]$. De plus, pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I_n - M)$.

Propriété. Pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $\chi_{{}^tM} = \chi_M$.

Propriété. Si M est une matrice triangulaire supérieure (ou inférieure) dont les coefficients diagonaux sont $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, alors $\chi_M(X) = \prod_{i=1}^{n}(X - \lambda_i)$.

Propriété. Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique. La réciproque est fausse.
Il faut savoir le démontrer.

Définition. On déduit de la propriété précédente que la quantité $\chi_{mat(u,e)}$ ne dépend pas du choix de la base e de E. Cette quantité s'appelle le polynôme caractéristique de u.

Propriété. $(\lambda \in Sp(u)) \iff (\lambda \in \mathbb{K}$ et $\chi_u(\lambda) = 0)$.

Corollaire. Pour toute $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $Sp({}^tM) = Sp(M)$.

Corollaire. Le spectre d'une matrice triangulaire supérieure est égal l'ensemble de ses coefficients diagonaux.

Définition. Si λ est une valeur propre de u, on appelle multiplicité de λ sa multiplicité en tant que racine de χ_u. On la note $m(\lambda)$.

2.2 Propriétés du polynôme caractéristique

Propriété. $\chi_u(X) = X^n - Tr(u)X^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(u)$.
Il faut savoir le démontrer.

Corollaire. Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, u admet au moins un vecteur propre.

Corollaire. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$, $Tr(u) = \displaystyle\sum_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} m(\lambda)\lambda$ et $\det(u) = \displaystyle\prod_{\lambda \in Sp_{\mathbb{K}}(u)} \lambda^{m(\lambda)}$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E stable par u. Alors $\chi_{u|_F^F}$ divise χ_u.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $(E_1, \ldots, E_p)$ une famille de sous-espaces vectoriels de E telle que $E = \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{p} E_i$. On suppose que u stabilise la famille $(E_1, \ldots, E_p)$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, on note u_i l'endomorphisme induit par u sur E_i. Alors $\chi_u = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} \chi_{u_i}$.

Notation. Pour tout $\lambda \in E_\lambda$, on note $q(\lambda) = dim(E_\lambda)$.

Propriété. $\forall \lambda \in Sp(u)\ \ 1 \leq q(\lambda) \leq m(\lambda)$.
Il faut savoir le démontrer.

Cas particulier. Si λ est une valeur propre simple de u, $1 = q(\lambda) = m(\lambda)$.

2.3 Caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Théorème. u est dz si et seulement si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et, pour tout $\lambda \in Sp(u)$, $m(\lambda) = q(\lambda)$.

Cas particulier. Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable.

Espaces euclidiens (début)

3 Définition d'un produit scalaire

Notation. E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est définie si et seulement si $\forall x \in E \setminus \{0\},\ \varphi(x,x) \neq 0$.

Définition. $\varphi \in L_2(E)$ est positive si et seulement si $\forall x \in E,\ \varphi(x,x) \geq 0$.

Définition. Un ***produit scalaire*** est une forme bilinéaire symétrique définie positive, c'est-à-dire une application $\varphi\ :\ E^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x, y, z \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,
— $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$;
— $\varphi(\lambda x + y, z) = \lambda\varphi(x,z) + \varphi(y,z)$;
— $x \neq 0 \Longrightarrow \varphi(x,x) > 0$.
Un ***espace préhilbertien réel*** est un couple (E,φ), où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel et où φ est un produit scalaire sur E.

4 Exemples

◇ Si $e = (e_i)_{i\in I}$ est une base de E, $\begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \left(\sum_{i\in I} x_i e_i, \sum_{i\in I} y_i e_i\right) & \longmapsto & \sum_{i\in I} x_i y_i \end{array}$ est un p.s sur E.

◇ $\begin{array}{cccc} \varphi : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & ((\alpha_1,\ldots,\alpha_n),(\beta_1,\ldots,\beta_n)) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i \end{array}$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.
Alors, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(X,Y) = {}^t XY$.

◇ $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (A,B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}({}^t AB) \end{array}$ est le produit scalaire canonique de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

◇ En posant $\varphi(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)dt$, φ est un produit scalaire sur $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.
Il faut savoir le démontrer.

Notation. ◇ Pour $p \in \mathbb{R}_+^*$, $l^p = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ /\ \sum |u_n|^p \text{ CV}\}$.
◇ Notons l^∞ l'ensemble des suites bornées de réels.

Propriété. l^1, l^2 et l^∞ sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.
De plus si (a_n) et (b_n) sont dans l^2, alors $(a_n b_n)$ est un élément de l^1.

Propriété. Pour tout $(u_n), (v_n) \in l^2$, on pose $((u_n)|(v_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n v_n$.
l^2 muni de $(.|.)$ est un espace préhilbertien.

5 Identités remarquables

Notation. E est un espace préhilbertien réel. Son produit scalaire sera noté $(.|.)$.

Définition. Pour tout $x \in E$, la norme de x est $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$.

Formule. Pour tout $((x, y), \alpha) \in E^2 \times \mathbb{R}$,

$$\boxed{\begin{array}{cl} \|\alpha x\| & = |\alpha|\|x\|, \\ \|x+y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x|y), \\ \|x-y\|^2 & = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2(x|y), \\ \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 & = 4(x|y), \\ \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 & = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \end{array}}$$

La dernière formule est la ***formule du parallélogramme*** ou ***formule de la médiane***.
Les seconde, troisième et quatrième formules sont des ***formules de polarisation***.

Théorème de Pythagore : $(x|y) = 0 \iff \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

6 Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski

Inégalité de Cauchy-Schwarz : $\forall (x, y) \in E^2 \ \ |(x|y)| \leq \|x\|\|y\|$,
avec égalité si et seulement si x et y sont colinéaires.
Il faut savoir le démontrer.

Inégalité de Minkowski, ou inégalité triangulaire : $\forall (x, y) \in E^2 \ \ \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
avec égalité ssi x et y sont positivement colinéaires, i.e $y = 0$ ou il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que $x = ky$.
Il faut savoir le démontrer.

Théorème. La norme associée au produit scalaire d'un espace préhilbertien est bien une norme.

7 Orthogonalité

Notation. E est un espace préhilbertien. Son produit scalaire est noté $< ., . >$.

7.1 Orthogonalité en dimension quelconque

Définition. Soit $(x, y) \in E^2$. x et y sont orthogonaux ssi $< x, y >= 0$. On note $x \perp y$.

Définition. Si $A \subset E$, $A^\perp = \{x \in E / \forall y \in A \quad x \perp y\}$: l'orthogonal de A est l'ensemble des vecteurs de E qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de A.

Exemple. Si $a \in E \setminus \{0\}$, $a^\perp$ est un hyperplan.

Propriété. Soit A une partie de E. Alors $A^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

Définition. Soient A et B deux parties de E. On dit qu'elles sont orthogonales si et seulement si tout vecteur de A est orthogonal à tout vecteur de B : $A \perp B \iff [\forall (a, b) \in A \times B, \ \ a \perp b]$.

Propriété. Soient A et B deux parties de E. $A \perp B \iff \ A \subset B^\perp \iff B \subset A^\perp$.

Propriété. $A \subseteq B \Longrightarrow B^\perp \subseteq A^\perp$, $(A \cup B)^\perp = A^\perp \cap B^\perp$, $A^\perp = (\mathrm{Vect}(A))^\perp$ et $A \subseteq (A^\perp)^\perp$.
Il faut savoir le démontrer.

Remarque. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels, $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$,
mais en général, $(F \cap G)^\perp \neq F^\perp + G^\perp$ et $F^{\perp\perp} \neq F$.

Propriété. $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$.

Définition. $(x_i)_{i \in I} \in E^I$ est orthogonale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \ \ (i \neq j \Longrightarrow x_i \perp x_j)$.
Elle est orthonormale si et seulement si : $\forall (i, j) \in I^2, \ \ < x_i, x_j >= \delta_{i,j}$.

Relation de Pythagore : Si $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille orthogonale de vecteurs de E, $\|\sum_{i=1}^{n} x_i\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2$. Lorsque $n \geq 3$, la réciproque est fausse.

Propriété. Une famille orthogonale sans vecteur nul est libre.
En particulier, une famille orthonormale est toujours libre.

Propriété. Supposons que E admet une base orthonormée notée $(e_i)_{i\in I}$.
Si $x = \sum_{i\in I} \alpha_i e_i \in E$ et $y = \sum_{i\in I} \beta_i e_i \in E$, alors
$< x, y >= \sum_{i\in I} \alpha_i \beta_i$, $\|x\|^2 = \sum_{i\in I} \alpha_i^2$ et $x = \sum_{i\in I} < e_i, x > e_i$.

Propriété. Supposons que E est muni d'une base $e = (e_i)_{i\in I}$.
Alors il existe un unique produit scalaire sur E pour lequel e est une base orthonormée.

Propriété. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de n sous-espaces vectoriels de E deux à deux orthogonaux. Alors ils forment une somme directe que l'on note $E_1 \overset{\perp}{\bigoplus} \cdots \overset{\perp}{\bigoplus} E_n = \overset{\perp}{\bigoplus_{1\leq i\leq n}} E_i$.

Définition. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels de E.
G est un ***supplémentaire orthogonal*** de F si et seulement si $E = F \overset{\perp}{\oplus} G$.

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E. F admet au plus un supplémentaire orthogonal. Il s'agit de $F^\perp$. Il est cependant possible que $F \overset{\perp}{\oplus} F^\perp \neq E$.
Il faut savoir le démontrer.