# DM 39

**Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.**
**Il n'est pas à rendre.**
**Un corrigé sera fourni lundi 3 juin.**

## Introduction

**Dans tout ce problème, $n$ désigne un entier strictement positif, et les espaces vectoriels sont toujours des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels.**

**Dans ce problème, on appelle corps toute $\mathbb{R}$-algèbre, éventuellement non commutative, dans laquelle tout élément non nul admet un inverse pour le produit.**

## Partie I : Étude d'un exemple

**1°) Soit $A$ une matrice quelconque de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Vérifier que:**

$$A^2 - \operatorname{tr}(A)A + \det(A)I_2 = 0\,.$$

**2°) Soit $A$ une matrice non scalaire; on note $\mathbb{A}$ l'ensemble**

$$\mathbb{A} = \{M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \ / \ \exists (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ M = aI_2 + bA\}$$

**Vérifier que $\mathbb{A}$ est une algèbre de dimension deux, sous-algèbre de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.**
**3°) Montrer que $\mathbb{A}$ contient une matrice $B$ telle que $B^2 = -I_2$ si et seulement si $(\operatorname{tr} A)^2 < 4\det A$.**
**4°) Vérifier qu'alors $I_2$ et $B$ forment une base de $\mathbb{A}$ et en déduire un isomorphisme d'algèbres entre $\mathbb{A}$ et le corps $\mathbb{C}$ des nombres complexes.**
**5°) On suppose que $A$ est non scalaire et vérifie: $(\operatorname{tr} A)^2 = 4\det A$. Déterminer toutes les matrices de $\mathbb{A}$ telles que $M^2 = 0$, et en déduire que $\mathbb{A}$ n'est pas un corps.**
**6°) Soit $B$ une matrice non scalaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On lui associe l'algèbre $\mathbb{B}$ comme dans I.2. Démontrer que si $A$ et $B$ sont semblables, $\mathbb{A}$ et $\mathbb{B}$ sont des algèbres isomorphes.**
**7°) On suppose que $\mathbb{A}$ est telle que: $(\operatorname{tr} A)^2 > 4\det A$. Vérifier que $A$ est diagonalisable de valeurs propres distinctes. En déduire que $\mathbb{A}$ est isomorphe à l'algèbre des matrices diagonales. Est-ce que $\mathbb{A}$ est un corps ?**

## Partie II : Quelques résultats généraux

**Soit $\mathbb{D}$ une algèbre de dimension finie $n$.**
**1°) Soit $a$ un élément de $\mathbb{D}$, démontrer que l'application $\varphi_a$, définie par:**

$$\varphi_a : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathbb{D} \\ x & \mapsto & ax \end{cases}$$

**est un endomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{D}$.**
**2°) On note $\mathcal{B}$ une base de $\mathbb{D}$. $\mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a)$ désigne la matrice de l'endomorphisme $\varphi_a$ dans la base $\mathcal{B}$. Démontrer que l'application:**

$$\Psi : \begin{cases} \mathbb{D} & \to & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ a & \mapsto & \mathbf{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_a) \end{cases}$$

**est un morphisme injectif d'algèbres. Vérifier que $\Psi(\mathbb{D})$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et en déduire que $\mathbb{D}$ est isomorphe à une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.**

**3°) On suppose que $\mathbb{D} = \mathbb{C}$, corps des nombres complexes. On munit $\mathbb{C}$, considéré comme $\mathbb{R}$-espace vectoriel, de la base $\mathcal{B} = (1, i)$. Pour tout nombre complexe $z = a + ib$, ($a$ et $b$ réels), écrire la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi_z)$.**
**4°) Soit maintenant $\mathbb{A}$ une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On s'intéresse à quelques cas où on peut affirmer que $\mathbb{A}$ est, ou n'est pas, un corps.**
a) **On suppose que $\mathbb{A}$ contient une matrice non scalaire $A$ qui a une valeur propre réelle $\lambda$. Montrer que $\mathbb{A}$ ne peut pas être un corps. On utilisera une matrice bien choisie, combinaison linéaire de $I_n$ et de $A$.**
b) **En déduire que si $\mathbb{A}$ contient une matrice diagonalisable ou trigonalisable non scalaire, elle ne peut pas être un corps.**
c) **On suppose que $\mathbb{A}$ est intègre, c'est-à-dire que:**

$$\forall A \in \mathbb{A}, \forall B \in \mathbb{A}, AB = 0 \implies A = 0 \textbf{ ou } B = 0\,.$$

**Montrer que, si $A$ est une matrice non nulle de $\mathbb{A}$, l'application $\Phi_A : X \mapsto AX$ est un isomorphisme de l'espace vectoriel $\mathbb{A}$. En déduire que $\mathbb{A}$ est un corps.**

## Partie III : L'algèbre des quaternions

**On suppose qu'il existe deux matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telles que:**

$$(*) \qquad A^2 = -I_n, \quad B^2 = -I_n, \quad AB + BA = 0$$

**1°) Démontrer que $n$ ne peut pas être impair.**
**2°) Démontrer que le sous-espace vectoriel $\mathbb{H}$ engendré par les matrices $I_n$, $A$, $B$ et $AB$ est une sous-algèbre de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$**
**3°) Lorsque $t$, $x$, $y$ et $z$ sont des réels, calculer le produit:**

$$(tI_n + xA + yB + zAB)(tI_n - xA - yB - zAB)$$

**4°) En déduire:**
**(a) que les quatre matrices $I_n$, $A$, $B$ et $AB$ sont indépendantes et forment une base de $\mathbb{H}$;**
**(b) que $\mathbb{H}$ est un corps.**
**5°) On suppose dans toute la suite du problème que $n = 4$ et, en notant $J$ la matrice $J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $\mathbf{0}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on définit les matrices $A$ et $B$ de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ par:**

$$A = \begin{pmatrix} J & 0 \\ 0 & -J \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

**On pose également $C = AB$.**
a) **Vérifier que les matrices $A$ et $B$ satisfont la condition $(*)$. On appellera donc $\mathbb{H}$ le sous- espace vectoriel de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ engendré par $I_4$, $A$, $B$ et $C = AB$. Ses éléments sont appelés quaternions. La base $(I_4, A, B, C)$ de $\mathbb{H}$ sera notée $\mathcal{B}$.**
b) **Soit $M$ une matrice non nulle de $\mathbb{H}$, vérifier que ${}^tM \in \mathbb{H}$; quel lien y a t-il entre $M^{-1}$ et ${}^tM$ ?**

## Partie IV : Les automorphismes de l'algèbre des quaternions

**1°) On appelle quaternion pur un élément $M$ de $\mathbb{H}$ tel que $M = -{}^tM$. Vérifier que l'ensemble des quaternions purs est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension trois et de base $\mathcal{C} = (A, B, C)$. On le note $\mathbb{L}$. Est-ce une sous-algèbre de $\mathbb{H}$ ?**
**2°) On munit $\mathbb{L}$ de la structure d'espace vectoriel euclidien telle que la base $\mathcal{C}$ soit orthonormée. Le produit scalaire de deux éléments $M$ et $N$ de $\mathbb{L}$ est noté $(M|N)$. Ainsi, si $M = xA + yB + zC$ et $N = x'A + y'B + z'C$ alors $(M|N) = xx' + yy' + zz'$.**
**On appelle norme de $M$ la quantité $\|M\| = \sqrt{(M|M)}$.**
**Vérifier que:**

$$\frac{1}{2}(MN + NM) = -(M|N)I_4\,.$$

**3°) Montrer qu'un quaternion est pur si, et seulement si, son carré est une matrice scalaire de la forme $\lambda I4$ où $\lambda$ est un réel négatif.**
**4°) Soit $\varphi$ un isomorphisme d'algèbre de $\mathbb{H}$ dans lui-même. Démontrer qu'il transforme tout quaternion pur en un quaternion pur de même norme, et que la restriction de $\varphi$ à $\mathbb{L}$ est un endomorphisme orthogonal : si $u \in L(\mathbb{L})$, $u$ est un endomorphisme orthogonal si et seulement si pour tout $M \in \mathbb{L}$, $\|u(M)\| = \|M\|$.**
**5°) Soient $M$ et $N$ deux quaternions purs. On veut démontrer que si $M$ et $N$ ont même norme, alors il existe $P \in \mathbb{H}$, non nulle, telle que: $M = P^{-1}NP$.**
a) **Commencer par examiner le cas où $M$ et $N$ sont colinéaires.**
b) **On suppose maintenant que $M$ et $N$ ne sont pas colinéaires. Vérifier que si $M$ et $N$ ont même norme :**

$$M(MN) - (MN)N = \|M\|^2(M - N)$$

**et en déduire une matrice $P$ non nulle telle que $MP = PN$.**
**6°) Montrer qu'alors, si on écrit $P = \alpha I_4 + Q$, avec $\alpha$ réel et $Q \in \mathbb{L}$, $Q$ est orthogonal à $M$ et à $N$.**
**7°) En déduire que tout isomorphisme d'algèbre $\varphi$ de $\mathbb{H}$ dans lui-même est défini par:**

$$\varphi(M) = P^{-1}MP$$

**où $P$ est un élément non nul de $\mathbb{H}$. On pourra observer qu'un tel isomorphisme est déterminé par l'image de $A$ et de $B$, et commencer par chercher les isomorphismes qui laissent $A$ invariante.**

## Fin de l'énoncé.