Calcul différentiel

Table des matières

Dans ce chapitre, on fixe
- ⋄ un couple d'entiers strictement positifs (n, p),
- ⋄ deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels E et F de dimensions respectives p et n,
- ⋄ un ouvert U de E,
- ⋄ une base $e = (e_1, \ldots, e_p)$ de E,
- ⋄ une base $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ de F,
- ⋄ et une application $\boxed{f \ : U \longrightarrow F}$.

Pour tout $x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j$, $f(x) = f\Big(\sum_{j=1}^{p} x_j e_j\Big)$ dépend des p variables réelles x_1, …, x_p.
On acceptera de noter $f(x) = f(x_1, \ldots, x_p)$.

Ce chapitre s'intéresse donc aux fonctions de plusieurs variables, pour lesquelles nous allons développer une notion (la différentielle) qui généralise la notion de dérivée d'une fonction d'une variable réelle.

1 Différentielles et dérivées partielles

1.1 Dérivées partielles

Introduction : Souvent, pour étudier une fonction de plusieurs variables, on se ramène par restriction à des fonctions d'une seule variable. Par exemple, on peut restreindre l'ensemble de départ de f à une droite affine. Cette approche conduit à la notion de dérivées partielles.

Notation. Fixons $a \in U$ et $v \in E \setminus \{0\}$.
◇ L'application $t \longmapsto f(a+tv)$ est une fonction d'une seule variable qui correspond à la restriction de f à la droite affine passant par a et dirigée par v.
◇ f est définie sur l'ouvert U, donc il existe $r > 0$ tel que $B_o(a, r) \subset U$. Ainsi l'application $t \longmapsto f(a+tv)$ est au moins définie sur $I =]-\varepsilon, \varepsilon[$, où $\varepsilon = \dfrac{r}{\|v\|} > 0$.

Définition. Si $t \longmapsto f(a+tv)$ est dérivable en 0, on dit que f est partiellement dérivable en a selon le vecteur v, et dans ce cas, la dérivée de $t \longmapsto f(a+tv)$ en 0 est appelée la dérivée partielle de f en a selon le vecteur v ; elle est notée $D_v f(a)$. Lorsque $D_v f(a)$ est définie, on dispose ainsi de la formule suivante :

$$\boxed{D_v f(a) = \Big(\frac{d}{dt}[f(a+tv)]\Big)(0).}$$

Propriété. Pour tout $x \in U$, notons $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i$.
$D_v f(a)$ est définie si et seulement si, pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $D_v f_i(a)$ est définie, et dans ce cas,

$$D_v f(a) = \sum_{i=1}^{n} D_v f_i(a) e'_i.$$

Démonstration.
On sait que l'application $t \longmapsto f(a+tv) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a+tv)e'_i$ est dérivable en 0 si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $t \longmapsto f_i(a+tv)$ est dérivable en 0, et dans ce cas, on sait que $\Big(\dfrac{d}{dt}[f(a+tv)]\Big)(0) = \sum_{i=1}^{n} \Big(\dfrac{d}{dt}[f_i(a+tv)]\Big)(0)e'_i$. □

Propriété. Soient $g : U \longrightarrow F$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(\alpha f + \beta g)(a)$ est définie et $D_v(\alpha f + \beta g)(a) = \alpha D_v(f)(a) + \beta D_v(g)(a)$.

Propriété. On suppose que $F = \mathbb{R}$. Soit $g : U \longrightarrow \mathbb{R}$. Si $D_v(f)(a)$ et $D_v(g)(a)$ sont définies, alors $D_v(fg)(a)$ est définie et $D_v(fg)(a) = g(a)D_v(f)(a) + f(a)D_v(g)(a)$.

Démonstration.
$D_v(fg)(a) = \Big(\dfrac{d}{dt}[f(a+tv) \times g(a+tv)]\Big)(0) = f(a)D_vg(a) + g(a)D_vf(a)$. □

Définition. Soit $j \in \mathbb{N}_p$. Si elle existe, on appelle $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f en a la dérivée partielle de f en a selon le vecteur e_j. Dans ce cas, on la note $D_jf(a)$ ou $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$, et on dispose ainsi des formules suivantes :

$$\boxed{D_jf(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = D_{e_j}f(a) = \Big(\frac{d}{dt}[f(a+te_j)]\Big)(0).}$$

Remarque. Cette définition dépend du choix de la base e de E.

Exemple 1. Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \quad f(x,y) = (x^2 - y^2)\ln(x^2+y^2)$ et $f(0,0) = 0$.
• $|f(x,y)| \le \|(x,y)\|_2^2 |\ln(\|(x,y)\|_2^2)| \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$,
donc f est une application continue sur $\mathbb{R}^2$.
• Soit $(x,y) \in (\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$.
⋄ Dans la quantité $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, les deux occurrences de la variable x jouent des rôles différents. Le 'x' de ∂x représente le nom générique de la première variable de f alors que le 'x' du couple (x,y) représente un réel fixé.
⋄ En revenant à la définition,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \Big(\frac{d}{dt}[f((x,y)+t(1,0))]\Big)(0)\\ &= \Big(\frac{d}{dt}[f(x+t,y)]\Big)(0) = \Big(\frac{d}{dz}[f(z,y)]\Big)(x)\\ &= \frac{d((z^2-y^2)\ln(z^2+y^2))}{dz}(x)\\ &= 2x\ln(x^2+y^2) + \frac{(x^2-y^2)2x}{x^2+y^2}.\end{aligned}$$

A l'usage, dans des cas simples, on utilise x à la place des variables z ou t, mais x doit alors être vu tantôt comme une variable et tantôt comme un réel fixé.
⋄ En $(0,0)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \dfrac{d(f(x,0))}{dx}(0)$.
Or $f(x,0) = x^2\ln(x^2)$ si $x \ne 0$ et $f(0,0) = 0$,
donc $\dfrac{d(f(x,0))}{dx}(0) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2\ln(x^2)}{x} = 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$.
• Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. $f(y,x) = -f(x,y)$, donc
$\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{d(f(x,z))}{dz}(y) = -\dfrac{d(f(z,x))}{dz}(y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$.
Pour la clarté du calcul précédent, l'utilisation d'une troisième variable z est indispensable.

Exemple 2. Considérons l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, si $y \neq 0$, alors $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ et si $y = 0$, alors $f(x,0) = 0$.

- Calculons les dérivées partielles de f en 0.

Soit $v = (a,b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
Si $b \neq 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}^*$, $\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{t^2a^2}{t^2b} = \frac{a^2}{b} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{a^2}{b}$.
Si $b = 0$, $\frac{f(tv) - f(0)}{t} = 0$,
donc f admet en $(0,0)$ une dérivée partielle selon toutes les directions.

- Pourtant f n'est pas continue en 0 (bien sûr, $0 = (0,0)$).

En effet, $f(t,0) = 0 \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0$ et $f(t,t^2) = 1 \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 1$.
Ainsi, l'existence en un point des dérivées partielles selon toutes les directions ne garantit même pas la continuité en ce point.

- Cet exemple montre que la notion de dérivée partielle se comporte mal relativement à la composition. En effet, f admet en 0 des dérivées partielles selon toutes les directions, $t \longmapsto (t,t^2)$ est une application dérivable en 0, mais $t \longmapsto f(t,t^2)$ n'est pas dérivable en 0, car elle n'est même pas continue en 0.
- La notion de dérivée partielle n'est donc pas une généralisation satisfaisante de la notion de dérivée au cas d'une fonction de plusieurs variables.

Remarque. De même, à propos de la continuité d'une application de plusieurs variables, on peut construire une application $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y \longmapsto f(x,y)$ est continue, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x,y)$ est continue, mais telle que f n'est pas continue.
Par exemple, on peut poser $f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ si $(x,y) \neq 0$ et $f(0,0) = 0$. En effet, si $x \neq 0$, $y \longmapsto f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ est continue et si $x = 0$, $y \longmapsto f(x,y) = 0$ est aussi continue. Par symétrie, il en est de même pour $x \longmapsto f(x,y)$ à y fixé. Mais f n'est pas continue en 0 car pour $t \neq 0$, $f(t,t) = \frac{1}{2} \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} \frac{1}{2}$ et $f(t,0) = 0 \underset{\substack{t\to 0\\ t\neq 0}}{\longrightarrow} 0$.

1.2 Différentielle

Notation. Dans ce chapitre, si $u \in L(E,F)$ et $h \in E$, on notera souvent $u.h$ au lieu de $u(h)$.

Définition. On dit que f est différentiable au point a si et seulement si f admet en a un développement limité à l'ordre 1, c'est-à-dire si et seulement s'il existe $u \in L(E,F)$ telle que $f(a+h) \underset{\substack{h\to 0\\ a+h\in U}}{=} f(a) + u.h + o(h)$, ce que l'on peut encore écrire sous la forme : $\frac{1}{\|h\|}(f(a+h) - f(a) - u.h) \underset{\substack{h\to 0\\ a+h\in U}}{\longrightarrow} 0$. Dans ce cas u est unique. Elle est appelée la différentielle de f en a, ou encore l'application linéaire tangente à f en a. Elle est notée $d(f)(a)$, si bien que lorsque f est différentiable en a, pour h au voisinage de 0,

$$\boxed{f(a+h) = f(a) + d(f)(a).h + o(h), \text{ et } d(f)(a) \in L(E,F).}$$

Démonstration.
Supposons qu'il existe u et v dans $L(E,F)$ telles que
$f(a+h) = f(a) + u(h) + o(h) = f(a) + v(h) + o(h)$. Ainsi, $(u-v)(h) = o(h)$.
Soit $x \in E$. Pour $t \in \mathbb{R}^*$ au voisinage de 0, $(u-v)(tx) = o(t)$, donc
$(u-v)(x) = \frac{1}{t}(u-v)(tx) = o(1) \underset{\substack{t\to 0\\ a+tx\in U}}{\longrightarrow} 0$, donc $(u-v)(x) = 0$. □

Remarque. Lorsque $f : U \longrightarrow F$ est différentiable au point $a \in U$, en première approximation f est assimilable au voisinage du point a à la somme d'une fonction constante et d'une application linéaire.

Remarque. Lorsque $E = \mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow F$ est différentiable en $a \in U$ si et seulement si f est dérivable en a et dans ce cas, $d(f)(a).h = f'(a).h = h.f'(a)$.
En particulier, $\boxed{f'(a) = d(f)(a).1}$.

Démonstration.
f est dérivable en a si et seulement si f admet au voisinage de a un développement limité de la forme $f(a+h) = f(a) + lh + o(h)$, donc si et seulement si f est différentiable en a.
Dans ce cas, $l = f'(a)$ et la différentielle de f en a est l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & F \\ h & \longmapsto & f'(a)h \end{array}$.
□

Exemple. Soit $\begin{array}{cccc} F : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (f(x,y), g(x,y)) \end{array}$ où $\begin{cases} f(x,y) & = x + y - x^3 \\ g(x,y) & = x - y + xy \end{cases}$.
$F(x,y) = \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x^3 \\ xy \end{pmatrix}$. Choisissons sur $\mathbb{R}^2$ la norme infinie. Ainsi $|x| \leq \| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|$ donc $|x| = O\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \right)$. De même, $|y| = O\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \right)$, donc
$\| \begin{pmatrix} -x^3 \\ xy \end{pmatrix} \| \leq |x|^3 + |x||y| = O\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^3 \right) + O\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \|^2 \right) = o\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \right)$, ce qui montre que $\begin{pmatrix} -x^3 \\ xy \end{pmatrix} = o\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \right)$.
Ainsi $F(x,y) = F(0,0) + \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} + o\left(\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \| \right)$, ce qui prouve que F est différentiable en 0 et que $\begin{array}{cccc} d(F)(0) : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix} \end{array}$.

Propriété. $\boxed{\text{Si } f \text{ est différentiable en } a, \text{ alors } f \text{ est continue en } a.}$

Démonstration.
$f(a+h) = f(a) + d(f)(a)(h) + o(h) \underset{\substack{h\to 0\\ a+h\in U}}{\longrightarrow} f(a)$. □

Propriété. $\boxed{\text{On suppose que } f \text{ est différentiable en } a}$. Alors pour tout $v \in E$, f admet une dérivée partielle en a selon le vecteur v et

$$\boxed{D_v f(a) = d(f)(a)(v).}$$

Démonstration.
f étant différentiable en a, $f(a+tv) = f(a) + d(f)(a)(tv) + o(tv)$ lorsque t est au voisinage de 0, donc $f(a+tv) = f(a) + td(f)(a)(v) + o(t)$.
Ainsi $\dfrac{f(a+tv)-f(a)}{t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} d(f)(a)(v)$. □

Remarque. L'exemple 2 montre que la réciproque est fausse. f peut admettre en a des dérivées partielles selon toutes les directions sans qu'elle soit différentiable en a. En effet, dans l'exemple 2, f n'est pas continue en 0, donc *a fortiori*, elle n'est pas différentiable en 0.

Propriété. On suppose que f est différentiable en a. Alors toutes les dérivées partielles de f en a sont définies et pour tout $h = \sum_{j=1}^{p} h_j e_j$,

$$d(f)(a).h = \sum_{j=1}^{p} h_j d(f)(a)(e_j) = \sum_{j=1}^{p} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a).$$

Ainsi

$$\boxed{d(f)(a) = \sum_{j=1}^{p} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a),}$$

où dx_j désigne l'application j-ième coordonnée dans la base e.

Définition. Pour tout $x \in U$, notons $f(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)e'_i$. On suppose que f est différentiable en a. On appelle matrice jacobienne de f en a la matrice de $d(f)(a)$ dans les bases e et e'. On la note $J_f(a) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Ainsi les colonnes de $J_f(a)$ sont les coordonnées dans la base e' des $d(f)(a)(e_j) = \dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a)$. On dispose donc de la formule suivante :

$$\boxed{J_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1\le i\le n\\ 1\le j\le p}}.}$$

Définition. On dit que f est différentiable sur U lorsque, pour tout $a \in U$, f est différentiable en a. Dans ce cas, on dispose de la différentielle de f,
notée $df \ : \ U \longrightarrow L(E,F)$.

2 Cas des applications numériques

2.1 Le gradient

Notation. dans ce paragraphe, on suppose que f est numérique, au sens que $F = \mathbb{R}$.

Définition. Supposons que E est un espace euclidien et que f est différentiable en a. Si $x, y \in E$, on notera $x.y$ ou bien $< x, y >$ le produit scalaire entre x et y. Dans ce cas, on sait que l'application $\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & L(E,\mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & < x, . > \end{array}$ est un isomorphisme.
Or $d(f)(a) \in L(E, \mathbb{R})$, donc il existe un unique $g \in E$ tel que pour tout $h \in E$, $d(f)(a).h = g.h$.
g est appelé le gradient de f en a et est noté $\nabla f(a)$. Ainsi $\nabla f(a)$ est caractérisé par la relation

$$\boxed{\forall h \in E \ \ (\nabla f(a)).h = d(f)(a).h.}$$

Si $e = (e_1, \ldots, e_p)$ est une base **orthonormée** de E, on vérifie que

$$\boxed{\nabla f(a) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) e_j.}$$

Propriété. Avec les notations et hypothèses précédentes, lorsque h est au voisinage de 0, l'accroissement de f entre a et $a + h$ vaut $f(a + h) - f(a) = (\nabla f(a)).h + o(h)$.
Supposons que $\nabla f(a) \neq 0$. D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, lorsque h est unitaire, $(\nabla f(a)).h \leq \|\nabla f(a)\| \|h\| = \|\nabla f(a)\|$, avec égalité si et seulement si h est colinéaire à $\nabla f(a)$ et de même sens.
Ainsi $\nabla f(a)$ indique la direction h selon laquelle l'augmentation de $f(a)$ à $f(a+h)$ est maximale, avec h unitaire.
On dit aussi que $-\nabla f(a)$ est la direction de plus grande pente.

2.2 Recherche des extrema

Définition. On suppose que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.
On dit que $a \in U$ est un point critique de f si et seulement si $d(f)(a) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$.

Théorème. On suppose que $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est différentiable.
Si f admet un extremum local en $a \in U$, alors a est un point critique de f.

Démonstration.
Supposons par exemple que f admet un maximum local en a, c'est-à-dire qu'il existe un voisinage V de a tel que $\forall x \in V \quad f(x) \leq f(a)$.
Notons $a = \sum_{j=1}^{p} a_j e_j$ et soit $j \in \{1, \ldots, p\}$.

la fonction $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & f(a+xe_j) \end{array}$ admet un maximum local en 0. Comme elle est définie et dérivable sur un voisinage de 0, sa dérivée en 0 est nulle. Ainsi $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(a) = 0$. □

Exercice. Parmi les pavés de $\mathbb{R}^3$ (i.e : les parallélépipèdes droits) d'un volume fixé, déterminer ceux dont la surface est minimale.

Résolution.

• Notons $V > 0$ le volume fixé. La surface d'un pavé de $\mathbb{R}^3$ de volume V dépend des dimensions l, h et $\dfrac{V}{lh}$ de ce pavé.

Il s'agit donc de rechercher le minimum de $f(l,h) = lh + \dfrac{V}{h} + \dfrac{V}{l}$ définie sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$.

Par l'inégalité arithmético-géométrique, $f(l,h) \geq 3\sqrt[3]{lh\frac{V}{l}\frac{V}{h}} = 3V^{\frac{2}{3}} = f(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$, donc on obtient ainsi immédiatement que $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}})$ est le minimum global de f sur ${\mathbb{R}_+^*}^2$. Etudions cependant une autre preuve, utilisant le calcul différentiel, à titre pédagogique.

$\dfrac{\partial f}{\partial l}(l,h) = h - \dfrac{V}{l^2}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial h}(l,h) = l - \dfrac{V}{h^2}$. Ainsi, si $(l,h) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ est un point critique, $hl = \dfrac{V^2}{(hl)^2}$, donc $hl = V^{\frac{2}{3}}$, puis $h = l = \dfrac{V}{hl} = V^{\frac{1}{3}}$. Réciproquement, on vérifie que le point $(V^{\frac{1}{3}}, V^{\frac{1}{3}}) \in {\mathbb{R}_+^*}^2$ est un point critique de f. Ainsi, f admet un unique point critique égal à $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ (correspondant à un cube).

• Notons $m = f(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V}) = 3V^{\frac{2}{3}}$ et montrons qu'il s'agit d'un minimum global.
Pour $\varepsilon > 0$, notons $D_\varepsilon = (]0,\varepsilon[\times\mathbb{R}_+^*) \cup (\mathbb{R}_+^*\times]0,\varepsilon[)$.

Pour tout $(l,h) \in D_\varepsilon$, $f(l,h) \geq \dfrac{V}{\varepsilon}$. Choisissons ε tel que $\dfrac{V}{\varepsilon} > m$.
Ainsi, $\forall (l,h) \in D_\varepsilon$, $f(l,h) > m$.
Soit $M \in \mathbb{R}_+^*$. Notons $K = ({\mathbb{R}_+^*}^2 \setminus D_\varepsilon) \cap B_f(0,M)$ où $B_f(0,M)$ est la boule fermée pour la norme infinie de centre 0 et de rayon M . Si $(l,h) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \setminus K$, ou bien $(l,h) \in D_\varepsilon$ et dans ce cas $f(l,h) > m$, ou bien $lh \geq M\varepsilon$ et dans ce cas $f(l,h) \geq M\varepsilon$.
Choisissons $M > \dfrac{m}{\varepsilon}$. Ainsi, pour tout $(l,h) \in {\mathbb{R}_+^*}^2 \setminus K$, $f(l,h) > m$.
De plus K est fermé et borné, donc il est compact, donc $f_{/K}$ admet un minimum global, et c'est un minimum global pour f. Il s'agit nécessairement de l'unique point critique de f. On a prouvé que le point $(\sqrt[3]{V}, \sqrt[3]{V})$ est l'unique point en lequel f atteint son minimum global. Ainsi la surface du pavé est minimum lorsque ce pavé est un cube.

3 Applications continûment différentiables

3.1 Définition

Introduction : La notion de dérivée partielle est simple mais elle se comporte mal pour la composition. Au contraire, la notion de différentielle est plus abstraite, mais elle se comporte bien pour la composition (cf le chapitre 4).
Ces deux notions sont cependant "équivalentes" sous une condition plus forte de régularité (application de classe C^1). C'est ce que démontre le théorème fondamental ci-dessous.

Définition. On dit que f est une application de classe C^1 sur U, ou qu'elle est continûment différentiable sur U si et seulement si f est différentiable et $d(f)$ est continue de U dans $L(E, F)$.

Théorème. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, l'application $j^{\text{ème}}$ dérivée partielle de f est définie et continue de U dans F.

Démonstration.
Admis. $\square$

Propriété. f est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v(f)$ est définie et continue.

Démonstration.
Si pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, l'application $D_v(f)$ est définie et continue, alors c'est en particulier le cas pour les dérivées partielles de f, donc f est de classe C^1.
Réciproquement, si f est de classe C^1, pour tout $v \in E \setminus \{0\}$, on peut construire une base de E dont v est le premier vecteur. Alors $D_v(f) = \dfrac{\partial f}{\partial x_1}$, donc $D_v(f)$ est définie et continue sur U. $\square$

Propriété. $\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i \end{array}$ est de classe C^1 sur U si et seulement si pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, f_i est de classe C^1 sur U.

Démonstration.
Pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$, les applications composantes de $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ sont les $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$. $\square$

3.2 Exemples

Exemple. Reprenons l'exemple 1. Les dérivées partielles sont définies sur $\mathbb{R}^2$ et sont continues sur $(\mathbb{R}^2) \setminus \{0\}$ d'après les théorèmes usuels.
Etude en $(0, 0)$. Si $(x, y) \neq 0$,
$\left|\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right| \leq 2\|(x, y)\|_2 |\ln \|(x, y)\|_2^2| + 2\|(x, y)\|_2 \underset{(x,y)\to 0}{\longrightarrow} 0$, donc $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ est une application continue en 0.

Comme $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\dfrac{\partial f}{\partial x}(y,x)$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ est aussi continue en 0.
Ainsi f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exemple. On suppose que E est euclidien et que e est une base orthonormée de E.
Etudions la différentiabilité de l'application $\begin{array}{cccc} \|.\|: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \|x\| \end{array}$.

• Non différentiabilité de $\|.\|$ en 0 :
Soit $i \in \mathbb{N}_p$. $\dfrac{\|te_i\|}{t} = \dfrac{|t|}{t}$ n'admet pas de limite lorsque t tend vers 0, donc $\|.\|$ n'admet aucune dérivée partielle en 0.
On en déduit que $\|.\|$ n'est pas différentiable en 0.

• Différentiabilité de $\|.\|$ sur $E \setminus \{0\}$.

Première méthode :

◇ Soit $i \in \{1, \ldots, p\}$ et $x \in E \setminus \{0\}$.
Calculons, si elle existe, la $i^{\text{ème}}$ dérivée partielle de $\|.\|$ en x.
$\|x\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{j=1}^{p} x_j^2}$, donc cette dérivée partielle est définie et $\dfrac{\partial\|.\|}{\partial x_i}(x) = \dfrac{x_i}{\|x\|}$.
Ainsi, toutes les dérivées partielles sont définies et continues sur $E \setminus \{0\}$.

◇ On en déduit que $\|.\|$ est une application de classe C^1 sur $E \setminus \{0\}$.
De plus, pour tout $h = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} h_j e_j$, $d\|.\|(x)[h] = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial\|.\|}{\partial x_i}(x) h_i = \sum_{i=1}^{p} \frac{x_i}{\|x\|} h_i$,
donc $d\|.\|(x) = \left(h \longmapsto \dfrac{< x, h >}{\|x\|} \right)$.
Enfin, $\nabla\|.\|(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

Seconde méthode :

◇ Soient $x \in E \setminus \{0\}$ et $h \in E$.
$\|x+h\| = \sqrt{\|x\|^2 + \|h\|^2 + 2 < x, h >} = \|x\| \sqrt{1 + 2 < \dfrac{x}{\|x\|^2}, h > + o(h)}$,
or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $2 < \dfrac{x}{\|x\|^2}, h >= O(h)$, donc
$\|x+h\| = \|x\|(1 + < \dfrac{x}{\|x\|^2}, h > + o(h))) = \|x\| + < \dfrac{x}{\|x\|}, h > + o(h)$.
L'application $h \longmapsto < \dfrac{x}{\|x\|}, h >$ étant linéaire, l'égalité précédente prouve que $\|.\|$ est différentiable en x et que $d(\|.\|)(x)(h) = < \frac{x}{\|x\|}, h >$.
Ainsi, $\nabla\|.\|(x) = \dfrac{x}{\|x\|}$.

◇ Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, $\dfrac{\partial\|.\|}{\partial x_i}(x) = d(\|.\|)(x)(e_i) = \dfrac{x_i}{\|x\|}$. Ainsi $\dfrac{\partial\|.\|}{\partial x_i}$ est continue, ce qui prouve que $\|.\|$ est C^1.

Propriété.

Si f est une application linéaire de E dans F,
alors f est de classe C^1 et, pour tout $a \in E$, $d(f)(a) = f$.

Démonstration.
Soit $a \in E$. Pour h au voisinage de 0,
$f(a+h) = f(a)+f(h) = f(a)+f(h)+o(h)$, donc f est différentiable en a et $d(f)(a) = f$.
$d(f)$ est une application constante donc elle est continue, donc f est C^1. $\square$

Lemme : Si F, F' et F" sont trois $\mathbb{R}$-espaces vectoriels normés et si $B\ : F \times F' \longrightarrow F$" est une application bilinéaire continue, alors il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in F \times F'$, $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$.

Démonstration.
B étant continue en 0, il existe $\alpha > 0$ tel que, pour tout $(x, y) \in F \times F'$, si $\|(x, y)\|_\infty \leq \alpha$, alors $\|B(x, y)\| \leq 1$.
Soit $(x, y) \in F \times F'$ tels que $x \neq 0$ et $y \neq 0$.
Alors $\|(\frac{\alpha}{\|x\|}x, \frac{\alpha}{\|y\|}y)\|_\infty = \max(\frac{\alpha}{\|x\|}\|x\|, \frac{\alpha}{\|y\|}\|y\|) = \alpha$, donc $\|B(\frac{\alpha}{\|x\|}x, \frac{\alpha}{\|y\|}y)\| \leq 1$, mais B est bilinéaire, donc $\frac{\alpha^2}{\|x\|\|y\|}\|B(x, y)\| \leq 1$, donc $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$ avec $k = \frac{1}{\alpha^2}$.
Lorsque $x = 0$ ou $y = 0$, l'inégalité est encore clairement vraie. $\square$

Propriété. Soient F' et F" deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $B\ : F \times F' \longrightarrow F$" une application.

Si B est bilinéaire, elle est de classe C^1 et
$\forall (u, v) \in F \times F'\ \ \forall (h, h') \in F \times F'\ \ d(B)(u, v).(h, h') = B(h, v) + B(u, h')$.

Démonstration.
- Soit $(u, v) \in F \times F'$. Pour $(h, h') \in F \times F'$ au voisinage de 0,
$B(u + h, v + h') = B(u, v) + B(h, v) + B(u, h') + B(h, h')$, or B étant bilinéaire en dimension finie, elle est continue, donc d'après le lemme, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que pour tout $(x, y) \in F \times F'$, $\|B(x, y)\| \leq k\|x\|\|y\|$,
donc $\|B(h, h')\| \leq k\|(h, h')\|_\infty^2$. Ainsi $B(h, h') = o((h, h'))$, ce qui montre que B est différentiable en (u, v) et que $d(B)(u, v) = \Big((h, h') \longmapsto B(h, v) + B(u, h')\Big)$.
- Ainsi $d(B)$ est une application linéaire de $F \times F'$ dans $L(F \times F', F'')$. Nous sommes en dimension finie, donc $d(B)$ est continue, ce qui prouve que B est de classe C^1. $\square$

4 Composition

Théorème. Soit G un troisième $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $m \in \mathbb{N}^*$ et V un ouvert de F.

Soient $\begin{array}{rccc} f: & U & \longrightarrow & V \\ & x = \sum_{j=1}^{p} x_j e_j & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} f_i(x) e'_i \end{array}$ et $\begin{array}{rccc} g: & V & \longrightarrow & G \\ & y = \sum_{i=1}^{n} y_i e'_i & \longmapsto & g(y) \end{array}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1).

Alors $g \circ f$ est différentiable (resp : de classe C^1) et , pour tout $a \in U$,

$$\boxed{d(g \circ f)(a) = d(g)(f(a)) \circ d(f)(a).}$$

En passant aux matrices, on en déduit que

$$\boxed{J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a).}$$

Démonstration.

- Soit $h \in E$ tel que $a + h \in U$.

$(g \circ f)(a + h) = g[f(a + h)] = g[f(a) + d(f)(a).h + o(h)]$, or $d(f)(a).h + o(h) \underset{\substack{h\to 0\\ a+h\in U}}{\longrightarrow} 0$,
donc $(g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + d(g)(f(a)).[d(f)(a).h + o(h)] + o[d(f)(a).h + o(h)]$.
De plus, en normant correctement $L(E, F)$, $\|d(f)(a).h\| \leq \|d(f)(a)\|\|h\|$,
donc $o(d(f)(a).h + o(h)) = o(O(h) + o(h)) = o(h)$.
De plus, en normant correctement $L(F, G)$, $\|d(g)(f(a)).o(h)\| \leq \|d(g)(f(a))\|\|o(h)\|$,
donc $\|d(g)(f(a)).o(h)\| = O(o(h)) = o(h)$.
Ainsi $(g \circ f)(a + h) = (g \circ f)(a) + d(g)(f(a)).[d(f)(a)(h)] + o(h)$, ce qui montre que $g \circ f$ est différentiable en a et que $d(g \circ f)(a) = d(g)(f(a)) \circ d(f)(a)$.

- En passant aux matrices, on obtient $J_{g\circ f}(a) = J_g(f(a)) \times J_f(a)$.
- Supposons que f et g sont de classe C^1. Ainsi toutes les dérivées partielles de f et de g sont continues, donc les applications $a \longmapsto J_f(a)$ et $b \longmapsto J_g(b)$ sont continues.

La multiplication matricielle étant bilinéaire en dimension finie, donc continue, par composition, $a \longmapsto J_{g\circ f}(a)$ est continue, donc ses applications composantes sont continues, donc les dérivées partielles de $g \circ f$ sont continues, ce qui prouve que $g \circ f$ est de classe C^1. □

Remarque. Pour retenir la formule précédente, il faut la mettre en parallèle avec la formule de composition d'applications d'une variable réelle : $(g\circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

Formule. Avec les notations du théorème, pour tout $j \in \{1, \ldots, p\}$ et $a \in U$,

$$\text{Règle de la chaîne : } \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\frac{\partial g}{\partial y_i}(f(a)).$$

Démonstration.
Pour tout $h \in \{1, \dots, m\}$
$\dfrac{\partial(g \circ f)_h}{\partial x_j}(a) = [J_{g\circ f}(a)]_{h,j} = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} [J_g(f(a))]_{h,i}[J_f(a)]_{i,j} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\frac{\partial g_h}{\partial y_i}(f(a))$. □

Remarque. Lorsque $F = \mathbb{R}$, la formule précédente devient

$$\forall a \in U \ \ \forall j \in \mathbb{N}_p \quad \frac{\partial(g \circ f)}{\partial x_j}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) g'(f(a)).$$

En considérant que f ne dépend que de la seule variable x_j, cette formule est exactement la formule de dérivation de la composée de deux applications d'une variable réelle.

Exemple. $\dfrac{\partial \ln(x^2 + y^2 + 1)}{\partial x} = \dfrac{2x}{x^2 + y^2 + 1}$.

Propriété. Soient I un intervalle (non nécessairement ouvert) de $\mathbb{R}$,
$\begin{array}{rccc} M : & I & \longrightarrow & U \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{j=1}^{p} \varphi_j(t) e_j \end{array}$ un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) et
$f \ : U \longrightarrow F$ une application différentiable (resp : de classe C^1).
Alors $f \circ M$ est un arc paramétré dérivable (resp : de classe C^1) à valeurs dans F.
De plus, pour tout $a \in I$,

$$\boxed{\begin{aligned} (f \circ M)'(a) &= d(f)(M(a)).M'(a) \\ &= \sum_{j=1}^{p} M_j'(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M(a)). \end{aligned}}$$

Lorsque $F = \mathbb{R}$ et E est euclidien, on a aussi $\boxed{(f \circ M)'(a) = [\nabla f](M(a)).M'(a)}$.
On dit aussi que $(f \circ M)'(a)$ est la dérivée de f le long de l'arc paramétré M en a.

Démonstration.
Cette propriété n'est pas un cas particulier du théorème précédent car l'intervalle I n'est pas nécessairement ouvert. Cependant, on peut adapter la démonstration du théorème à la situation actuelle.
Soit $a \in I$. Lorsque h tend vers 0 avec $a + h \in I$,
$(f \circ M)(a + h) = f(M(a) + hM'(a) + o(h))$, or $hM'(a) + o(h) \underset{\substack{h\to 0 \\ a+h\in I}}{\longrightarrow} 0$, donc

$$\begin{aligned} (f \circ M)(a + h) &= f(M(a)) + d(f)(M(a))(hM'(a) + o(h)) + o(hM'(a) + o(h)) \\ &= (f \circ M)(a) + hd(f)(M(a))(M'(a)) + o(h), \end{aligned}$$

pour des raisons similaires à celles rencontrées dans la démonstration du théorème précédent.

Ainsi, $f\circ M$ est dérivable en a et $(f\circ M)'(a) = d(f)(M(a))(M'(a)) = \displaystyle\sum_{j=1}^{p} M_j'(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M(a))$.

Cette dernière formule prouve que, lorsque f et M sont de classe C^1, il en est de même de $f \circ M$. □

Remarque. Dans le cas où $E = \mathbb{R}^p$, on peut écrire cette formule sous la forme suivante :

$$\forall a \in I \ \ \frac{d[f(M_1(t), \ldots, M_p(t))]}{dt}(a) = \sum_{j=1}^{p} M_j'(a) \frac{\partial f}{\partial x_j}(M_1(a), \ldots, M_p(a)).$$

Exemple. Si $\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & f(x,y) \end{array}$ est une application de classe C^1,

$\dfrac{d(f(t^3, \sqrt{t^2+1}))}{dt} = 3t^2 \dfrac{\partial f}{\partial x}(t^3, \sqrt{t^2+1}) + \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}} \dfrac{\partial f}{\partial y}(t^3, \sqrt{t^2+1})$, et

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(t^3u^4, \sqrt{t^2+1+u^2})}{\partial t} = \ & 3t^2u^4 \frac{\partial f}{\partial x}(t^3u^4, \sqrt{t^2+1+u^2}) \\ & + \frac{t}{\sqrt{t^2+1+u^2}} \frac{\partial f}{\partial y}(t^3u^4, \sqrt{t^2+1+u^2}). \end{aligned}$$

Formule. On comprend mieux ainsi comment fonctionne la règle de la chaîne, qui peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\Big(g(f_1(x_1, \ldots, x_p), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_p)\Big) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial y_i}.$$

Propriété. On suppose que f est une application de classe C^1 de U dans F. Soit a et b deux points de U. On suppose qu'il existe un arc de classe C^1, $M : [0,1] \longrightarrow U$ tel que $M(0) = a$ et $M(1) = b$. Alors

$$f(b) - f(a) = \int_0^1 d(f)(M(t)).M'(t)dt.$$

Démonstration.
$f(b) - f(a) = f(M(1)) - f(M(0)) = \displaystyle\int_0^1 \frac{d}{dt}[f(M(t))]dt$, car $t \longmapsto f(M(t))$ est de classe C^1. Ainsi, $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 d(f)(M(t)).M'(t)dt$. □

Propriété. Si U est convexe, une application f de U dans F est constante si et seulement si f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.

Démonstration.
Si f est constante sur U, alors les dérivées partielles de f sont nulles, donc f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.
Réciproquement, supposons que $f : U \longrightarrow F$ est de classe C^1 avec $d(f) = 0$ et U convexe. Soit $a, b \in U$. Pour tout $t \in [0,1]$, posons $M(t) = a + t(b-a)$. Ainsi M est un arc de classe C^1 tel que $M(0) = a$ et $M(1) = b$.
Alors $f(b) - f(a) = \displaystyle\int_0^1 d(f)(M(t)).M'(t)dt = 0$. □

Propriété. Soient F' et F" deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies.
Soit $B\ : F \times F' \longrightarrow F$" une application bilinéaire.
Soient $f\ : U \longrightarrow F$ et $g\ : U \longrightarrow F'$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $\begin{array}{rccc} B(f,g): & U & \longrightarrow & F" \\ & x & \longmapsto & B(f(x),g(x)) \end{array}$ est une application différentiable (resp : de classe C^1) et

$$\forall a \in U \ \ \forall h \in E \ \boxed{d[B(f,g)](a).h = B(d(f)(a).h, g(a)) + B(f(a), d(g)(a).h).}$$

Démonstration.
• Notons $\begin{array}{rccc} \varphi: & U & \longrightarrow & F \times F' \\ & x & \longmapsto & (f(x),g(x)) \end{array}$. Soit $a \in U$. Pour h au voisinage de 0,
$\varphi(a+h) = (f(a), g(a)) + (d(f)(a).h, d(g)(a).h) + o(h)$,
donc φ est différentiable en a et $d\varphi(a) = \Big(h \longmapsto (d(f)(a).h, d(g)(a).h)\Big)$.
• Soit $v \in E \setminus \{0\}$. $D_v\varphi(a) = d\varphi(a)(v) = (D_vf(a), D_vg(a))$, donc $D_v\varphi$ est définie et continue sur U. Ainsi, lorsque f et g sont de classe C^1, φ est aussi de classe C^1 sur U.
• $B(f,g) = B \circ \varphi$, donc $B(f,g)$ est différentiable sur U (resp : de classe C^1). De plus, si $a \in U$ et si $h \in E$,

$$\begin{aligned} d[B(f,g)](a).h &= d(B)(\varphi(a)).[d\varphi(a).h] \\ &= d(B)(f(a),g(a)).(d(f)(a).h, d(g)(a).h) \\ &= B(d(f)(a).h, g(a)) + B(f(a), d(g)(a).h). \end{aligned}$$

□

Corollaire. Soient $f\ : U \longrightarrow F$ et $\varphi\ : U \longrightarrow \mathbb{R}$ deux applications différentiables (resp : de classe C^1). Alors $\begin{array}{rccc} \varphi.f: & U & \longrightarrow & F \\ & x & \longmapsto & \varphi(x).f(x) \end{array}$ est une application différentiable (resp : de classe C^1) et

$$\forall a \in U \ \ \forall h \in U \ \ d(\varphi.f)(a).h = [d\varphi(a).h].f(a) + [\varphi(a)].[d(f)(a).h].$$

5 Un peu de géométrie différentielle

5.1 Vecteurs tangents

Définition. Soit X une partie de E et x un point de X. Soit v un vecteur de E.
On dira que v est un vecteur tangent à X en x si et seulement si il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $M\ :]-\varepsilon, \varepsilon[\longrightarrow X$ dérivable en 0 tel que $x = M(0)$ et $v = M'(0)$.
En résumé, lorsque $v \neq 0$, v est tangent à X en x si et seulement si v dirige la tangente en x à un arc paramétré tracé sur X passant par x.

5.2 Plan tangent à une surface

Notation. On suppose que E est euclidien de dimension 3, muni d'une base orthonormée $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $u_\theta = \cos\theta\ \vec{\imath} + \sin\theta\ \vec{\jmath}$ et $v_\theta = u_{\theta+\frac{\pi}{2}}$.

Définition. On appelle nappe paramétrée différentiable toute application différentiable $M : \begin{array}{ccc} U & \longrightarrow & E \\ (u,v) & \longmapsto & M(u,v) \end{array}$, où U est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $M(U)$ est le support de la nappe M.

Exemple. Si $a > 0$, $M(\theta,\varphi) = O + a\sin\theta\overrightarrow{u}_\varphi + a\cos\theta\overrightarrow{k}$ où $(\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^2$ est un paramètrage de la sphère de centre O et de rayon a.

Définition. Soit $M\ : U \longrightarrow E$ une nappe différentiable et soit $(u_0,v_0) \in U$.
Toute combinaison linéaire des vecteurs $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)$ est un vecteur tangent à $M(U)$ en $M(u_0,v_0)$.
Lorsque $(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0))$ est libre,
le plan affine $M(u_0,v_0) + \mathrm{Vect}(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0), \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0))$ est appelé le plan tangent à M en $M(u_0,v_0)$, et la droite affine $M(u_0,v_0) + \mathbb{R}\left(\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0) \wedge \frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)\right)$ est appelée la normale à M en $M(u_0,v_0)$.

Démonstration.
Soit $\alpha,\beta \in \mathbb{R}^2$. Posons $P(t) = M(u_0+\alpha t, v_0+\beta t)$.
U étant ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $(u_0+\alpha t, v_0+\beta t) \in U$.
Ainsi, $P\ :]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow M(U)$ est un arc paramétré dérivable tel que $P(0) = M(u_0,v_0)$.
Alors $P'(0) = \alpha\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0) + \beta\frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)$ est un vecteur tangent à $M(U)$ en $M(u_0,v_0)$.
□

Remarque. Avec les notations et hypothèses de la définition,
pour (u,v) au voisinage de (u_0,v_0),

$$M(u,v) = M(u_0,v_0) + (u-u_0)\frac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0) + (v-v_0)\frac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0) + \circ(u-u_0, v-v_0).$$

Cela signifie qu'en première approximation, une surface $M(U)$ coïncide avec son plan tangent au voisinage de $M(u_0,v_0)$.

Exemple. On considère la surface $\mathcal{S}$ paramétrée en coordonnées cartésiennes par
$M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & E \\ (t,\theta) & \longmapsto & M(t,\theta) = O + (\cos t\cos\theta)\vec{\imath} + (\cos t\sin\theta)\vec{\jmath} + \theta\vec{k} \end{array}$.

Dans le repère mobile $R_\theta = (O, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{v_\theta}, \vec{k})$, $M(t,\theta) = \underset{R_\theta}{\left|\begin{array}{c} \cos t \\ 0 \\ \theta \end{array}\right.}$, donc, toujours dans le repère mobile, $\frac{\partial M}{\partial t} = \underset{R_\theta}{\left|\begin{array}{c} -\sin t \\ 0 \\ 0 \end{array}\right.}$ et $\frac{\partial M}{\partial \theta} = \underset{R_\theta}{\left|\begin{array}{c} 0 \\ \cos t \\ 1 \end{array}\right.}$, donc $\dfrac{\partial M}{\partial t} \wedge \dfrac{\partial M}{\partial \theta} = \underset{R_\theta}{\left|\begin{array}{c} 0 \\ \sin t \\ -\sin t \cos t \end{array}\right.}$.

Ainsi, lorsque $t \notin \pi\mathbb{Z}$, le plan tangent à $\mathcal{S}$ en $M(t,\theta)$ a pour équation dans le repère fixe $\mathcal{R}$: $-\sin\theta(x - \cos t \cos\theta) + \cos\theta(y - \cos t \sin\theta) - \cos t(z - \theta) = 0$, qu'il reste à simplifier.

Propriété. Soit U un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. Alors la surface S d'équation $z = f(x,y)$ est appelée le graphe de l'application f.
S est aussi le support de la nappe paramétrée différentiable $M : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ définie par $M(x,y) = \left|\begin{array}{c} x \\ y \\ f(x,y) \end{array}\right.$.

Fixons $(x_0,y_0) \in U$ et notons $z_0 = f(x_0,y_0)$ et $M_0 = \underset{\mathcal{R}}{\left|\begin{array}{c} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{array}\right.}$.

Alors le plan tangent en M_0 à S a pour équation
$z - z_0 = (x - x_0)\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) + (y - y_0)\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$.

Démonstration.

$\dfrac{\partial M}{\partial x}(x_0,y_0) = \left|\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \end{array}\right.$ et $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x_0,y_0) = \left|\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{array}\right.$ donc

$\dfrac{\partial M}{\partial x}(x_0,y_0) \wedge \dfrac{\partial M}{\partial y}(x_0,y_0) = \left|\begin{array}{c} -\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \\ 1 \end{array}\right. \neq 0$.

Ainsi $\left(\dfrac{\partial M}{\partial x}(x_0,y_0), \dfrac{\partial M}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ est libre et le plan tangent a pour équation

$$-(x - x_0)\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) - (y - y_0)\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) + (z - z_0) = 0.$$

$\square$

5.3 Surfaces de niveau

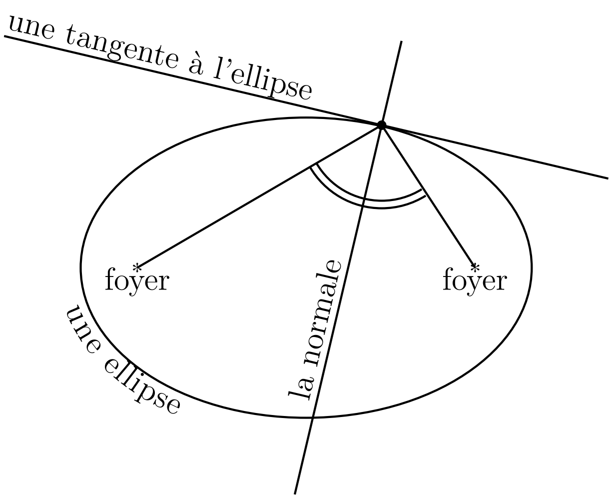
Notation. On suppose que E est euclidien.
Soit U un ouvert de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application différentiable. On appelle surfaces (ou lignes) de niveau de f les ensembles $\{x \in U / f(x) = k\}$, où k est fixé.

Propriété. Fixons $k \in \mathbb{R}$.
Soit x un point de la surface de niveau $X = \{x \in U / f(x) = k\}$.
Alors tout vecteur tangent en x à X est orthogonal au gradient de f en x.
On dit que le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau de f.

Démonstration.
Soit v un vecteur tangent en x à X :
il existe $\varepsilon > 0$ et un arc paramétré $M\ :\ ]-\varepsilon,\varepsilon[\longrightarrow X$ dérivable en 0 tel que $x = M(0)$ et $v = M'(0)$.

Pour tout $t \in]-\varepsilon,\varepsilon[$, $f(M(t)) = k$, donc $0 = \dfrac{d}{dt}(f(M(t))) = \nabla f(M(t)).M'(t)$.
En $t = 0$, on obtient $\nabla f(x).v = 0$. □

Exercice. Soit F et F' deux points distincts du plan euclidien $\mathbb{R}^2$. Soit $a \in \mathbb{R}$ tel que $2a > d(F,F') = FF'$. On note $\mathcal{E} = \{M \in \mathbb{R}^2 / MF + MF' = 2a\}$: on admettra que $\mathcal{E}$ est l'ellipse de foyer F et F' dont le grand axe est de longueur $2a$.
Montrer que la tangente en un point M de $\mathcal{E}$ est la bissectrice extérieure des demi-droites $[M,F)$ et $[M,F')$.



Solution : Notons $f\ :\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(M) = MF + MF'$. $\mathcal{E}$ est une ligne de niveau de f, donc la tangente en un point M de $\mathcal{E}$ est orthogonale au gradient de f en M. Il suffit donc de montrer que ce gradient dirige la bissectrice intérieure des demi-droites $[M,F)$ et $[M,F')$ (qui est orthogonale à la bissectrice extérieure), c'est-à-dire que le gradient est colinéaire au vecteur $\dfrac{\overrightarrow{MF}}{MF} + \dfrac{\overrightarrow{MF'}}{MF'}$.
Or, en posant $M = (x,y)$ et $F = (x_F, y_F)$, $MF = \sqrt{(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2}$,
donc $\dfrac{\partial(MF)}{\partial x} = \dfrac{x - x_F}{\sqrt{(x_F - x)^2 + (y_F - y)^2}}$ et $\dfrac{\partial(MF)}{\partial y} = \dfrac{y - y_F}{MF}$,
donc $\nabla(M \longmapsto MF) = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{MF}$, puis $\nabla f(M) = \dfrac{\overrightarrow{FM}}{MF} + \dfrac{\overrightarrow{F'M}}{MF'}$.