Corrigé du DM 40
Mines, MP 2001.

I.1. Premières propriétés.

a. Si x est vecteur co-propre (non nul) associé à μ_1 et μ_2 il vient $(\mu_1 - \mu_2)x = 0$ donc $\mu_1 = \mu_2$ car $x \neq 0$.

b. Si $u(x) = \mu x$ avec $x \neq 0$, alors $u(e^{-i\frac{\theta}{2}}x) = \overline{e^{-i\frac{\theta}{2}}}u(x) = e^{i\frac{\theta}{2}}u(x) = e^{i\theta}\mu e^{-i\frac{\theta}{2}}x$; de plus $e^{-i\frac{\theta}{2}}x \neq 0$, donc $\boxed{\mathrm{e}^{-i\frac{\theta}{2}}x}$ est co-propre associé à la valeur co-propre $e^{i\theta}\mu$.

I-1.c Il y a bien additivité puisque, si $(x, x') \in E_\mu^2$,
$u(x + x') = u(x) + u(x') = \mu x + \mu x' = \mu(x + x')$.
De plus E_μ est non vide, donc c'est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel si et seulement si pour tout $(a, x) \in \mathbb{K} \times E_\mu$, $u(ax) = \mu ax$, c'est-à-dire $\mu\bar{a}x = \mu ax$.
◇ Pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, cette condition est réalisée lorsque $\mu = 0$.
Lorsque $\mu \neq 0$, il existe $x \in E_\mu \setminus \{0\}$ et $\mu\bar{i}x \neq \mu ix$, donc E_μ n'est pas un $\mathbb{C}$-espace vectoriel lorsque $\mu \neq 0$.
◇ Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, la condition est toujours réalisée et E_μ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel .

I-1.d On a en effet,

$$\begin{aligned} u \circ v(ax + by) &= u(\bar{a}v(x) + \bar{b}v(y)) = \bar{\bar{a}}(u \circ v)(x) + \bar{\bar{b}}(u \circ v)(y) \\ &= a(u \circ v)(x) + b(u \circ v)(y), \end{aligned}$$

donc $u \circ v$ est linéaire.

I.2. Matrice associée à une application semi-linéaire.

a. Notons $A = (a_{ij})$ la matrice dont le (i, j)-ème coefficient $a_{i,j}$ est égal à la i^{eme} composante de $u(e_j)$ dans la base $\mathcal{B} = (e_k)$. Soit $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$ et $y = \sum_{k=0}^{n} y_k e_k$ deux vecteurs de E. $u(x) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} u(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} e_i$, donc
$y = u(x) \Longleftrightarrow [\forall i \in \mathbb{N}_n,\ \ y_i = \sum_{k=1}^{n} \overline{x_k} a_{i,k}]$. Ainsi $\boxed{y = u(x) \Longleftrightarrow Y = A\overline{X}}$.

b Soit x quelconque de E et soit $y = u(x)$. Avec des notations claires on a, d'après **a.** ci-dessus :
$Y = A\overline{X}$ et $Y' = B\overline{X'}$. Or $Y = SY'$ et $X = SX'$ donc $SY' = A\overline{SX'} = A\overline{S}\ \overline{X'}$ soit

$Y' = (S^{-1}A\overline{S})\overline{X'}$ puisque S est inversible. Il en résulte que $\Delta\overline{X'} = 0$ avec $\Delta = B - S^{-1}A\overline{S}$ et cela pour tout vecteur x donc pour toute colonne X'. En prenant X' successivement égal aux vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}^n$, il vient que toutes les colonnes de Δ sont nulles donc que Δ est nulle. Ainsi $\boxed{B = S^{-1}A\overline{S}}$.

I.3. Exemples.

a. Si $X = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$ est vecteur co-propre (non nul) associé à la valeur co-propre μ il vient $\begin{cases} \overline{b} = -\mu a \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$ donc $\begin{cases} b = -|\mu|^2 b \\ \overline{a} = \mu b \end{cases}$.
Or $X \neq 0$ donc $b \neq 0$ car $b = 0$ implique $a = 0$ donc $X = 0$.
Ainsi $|\mu|^2 = -1$ ce qui est impossible.
La rotation d'angle $\pi/2$ n'admet aucune valeur co-propre.

b. Si A est réelle et admet une valeur propre réelle λ alors il existe X vecteur réel non nul tel que $AX = \lambda X$. Or $X = \overline{X}$ de sorte que $A\overline{X} = \lambda X$.
Si $\lambda \in \mathbb{R}$ est valeur propre de la matrice réelle A alors elle est également valeur co-propre .

I.4. Valeurs co-propre de A et valeurs propres de $A\overline{A}$.

a. L'hypothèse s'écrit $A\overline{X} = \mu X$ avec $X \neq 0$, soit par conjugaison $\overline{A}X = \overline{\mu}\overline{X}$ et donc $A\overline{A}X = A\overline{\mu}\overline{X} = \overline{\mu}A\overline{X} = \overline{\mu}\mu X$ avec $X \neq 0$.

b. Avec les notations de l'énoncé :

- Supposons $A\overline{X}$ et X liés. Comme $X \neq 0$, il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $A\overline{X} = \alpha X$ ce qui implique que α est valeur co-propre de A. D'après **a.** ci-dessus $A\overline{A}X = |\alpha|^2 X$. Donc $\lambda X = |\alpha|^2 X$ et $\lambda = |\alpha|^2$ car $X \neq 0$. Il en résulte qu'il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\alpha = \sqrt{\lambda}e^{i\theta}$. Comme α est valeur co-propre de A, il en découle d'après **1.b.** que $\sqrt{\lambda} = \alpha e^{-i\theta}$ est également valeur co-propre .

- Supposons désormais $A\overline{X}$ et X indépendants. Il est naturel de chercher un vecteur co-propre associé à $\sqrt{\lambda}$ dans le plan engendré par ces deux vecteurs ce qui revient à chercher un vecteur co-propre de la forme $Y = A\overline{X} + \alpha X$.
Or $A\overline{Y} = \lambda X + \overline{\alpha}A\overline{X}$. On constate que $\alpha = \sqrt{\lambda}$ convient.

c. Il découle immédiatement de **a.** et de **b.** que :
$\mu \geq 0$ est valeur co-propre de A si et seulement si μ^2 est valeur propre de $A\overline{A}$.

I.5. Cas d'une matrice triangulaire supérieure.

a. Soit A triangulaire supérieure de diagonale, donc de spectre, $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. On sait que la matrice $A\overline{A}$ est triangulaire supérieure de diagonale, donc de spectre, $(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$. Ainsi si λ est valeur propre de A alors $|\lambda|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. D'après **4.** ci-dessus, $|\lambda|$ est valeur co-propre de A, donc λ également d'après **1.b.**, puis $\lambda e^{i\theta}$ est aussi valeur co-propre pour tout réel θ, toujours d'après **1.b.**

b. Si μ est valeur co-propre de A alors $|\mu|$ est également valeur co-propre de A d'après **1.b.**, donc $|\mu|^2$ est valeur propre de $A\overline{A}$. Ainsi, $|\mu|^2$ figure sur la diagonale de $A\overline{A}$. Donc il existe λ sur la diagonale de A, donc valeur propre de A, tel que $|\lambda|^2 = |\mu|^2$. Ainsi, il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $\lambda = \mu e^{i\theta}$.

c. Exemple : Ici $Sp(A) = \{i\}$; D'après (I-5.a) $1 = ie^{-i\frac{\pi}{2}}$ est valeur co-propre de A. Comme le suggère l'énoncé on doit résoudre le problème suivant :

(1) $\quad \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a-ib \\ c-id \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix}.$

Or (1) $\iff \begin{pmatrix} ia+b+c-id \\ ic+d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \end{pmatrix} \iff \begin{cases} ia+b+c-id = a+ib \\ c+id = ic+d \end{cases}$;

En identifiant partie réelle et partie imaginaire de la seconde ligne, on obtient $d = c$, et en reportant dans la première, on obtient

$ia+b+c-ic = a+ib \iff i(a-c-b)+b+c-a = 0$, donc $a = b+c$.

Ainsi, (1) $\iff \begin{cases} a = b+c \\ d = c \end{cases}$.

Le vecteur $\boxed{\mathbf{X} = \begin{pmatrix} b+c+ib \\ c+ic \end{pmatrix}}$ est co-propre pour A avec la valeur co-propre 1, lorsque $(b,c) \neq 0$.

I.6. Une caractérisation des valeurs co-propres.

D'après **1.b**, μ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ est valeur co-propre de $A = B + iC$, donc si et seulement si il existe $Z = X + iY \neq 0$ (avec X et Y dans $\mathbb{R}^n$) tel que $A\overline{Z} = |\mu|Z$ c'est à dire, en passant aux parties réelles et imaginaires, tel que $\begin{cases} BX + CY = |\mu|X \\ CX - BY = |\mu|Y \end{cases} \quad (S).$

$(S) \iff D\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = |\mu|\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$ et d'autre part, $Z \neq 0 \iff \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \neq 0$, donc μ est valeur co-propre de A si et seulement si $|\mu|$ est valeur propre de D.

II.1. Une relation d'équivalence.

Elle est en effet réflexive, symétrique et transitive :

$$\begin{cases} \text{Réflexivité} & : \text{avec } S = I_n,\ A = SA\overline{S}^{-1}. \\ \text{Symétrie} & : \text{Si } B = SA\overline{S}^{-1}, \text{ alors } A = RB\overline{R}^{-1} \text{ où } R = S^{-1}. \\ \text{Transitivité} & : \text{Si } B = SA\overline{S}^{-1} \text{ et si } C = RB\overline{R}^{-1}, \text{ alors } C = RSA(\overline{RS})^{-1}. \end{cases}$$

II.2. Indépendance des vecteurs co-propres.

◇ D'après **I.4.a.** la famille $(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ est une famille de vecteurs propres de $A\overline{A}$ associés aux valeurs propres $|\mu_1|^2, |\mu_2|^2, \ldots, |\mu_k|^2$ qui sont deux à deux distinctes donc cette famille est libre par le théorème d'indépendance linéaire des sous-espaces propres.

◇ On en déduit en utilisant **I.4.c.**, que si la matrice $A\overline{A}$ admet n valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ positives ou nulles et deux à deux distinctes, alors il existe une base $X = (X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que, pour tout i, $A\overline{X_i} = \sqrt{\lambda_i}X_i$. Notons u l'unique application semi-linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans lui-même dont la matrice dans la base canonique est A. Il s'agit de l'application $X \longmapsto A\overline{X}$. Alors, en notant $(X_i^*)_{1 \leq i \leq n}$ la base duale de X, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_n^2$, $[\text{mat}(u,X)]_{i,j} = X_i^*(u(X_j)) = X_i^*(A\overline{X_j}) = X_i^*(\sqrt{\lambda_j}X_j) = \delta_{i,j}\sqrt{\lambda_j}$, donc la matrice de u dans la base X est diagonale, de diagonale $(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n})$, donc A est co-diagonalisable.

II.3. Quelques propriétés.

a. Si $A = S\overline{S}^{-1}$ alors $A\overline{A} = S.\overline{S}^{-1}.\overline{S}.\overline{(\overline{S})^{-1}} = I_n$.

b. Pour toute matrice A, le spectre de A est de cardinal fini, donc on peut trouver $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $-e^{-2i\theta}$ ne soit pas valeur propre. Alors $A + e^{-2i\theta} I_n$ est inversible puis $S(\theta)$ est inversible.
Si on suppose en outre que $A\overline{A} = I_n$ alors $A\overline{S}(\theta) = S(\theta)$ d'où $A = S(\theta)\overline{S}^{-1}(\theta)$.

II.4. Une condition nécessaire de co-diagonalisibilité.
Notons $S^{-1}A\overline{S} = D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$. Il vient $A\overline{A} = SD\overline{D}S^{-1}$.
Ainsi $A\overline{A}$ est semblable à $D\overline{D} = \mathrm{diag}(|\lambda_1|^2, |\lambda_2|^2, \ldots, |\lambda_n|^2)$ donc est bien diagonalisable avec des valeurs propres positives ou nulles. En outre le rang de A est égal à celui de D (puisque S et $\overline{S}$ sont inversibles) donc au nombre de λ_i non nuls donc encore au rang de $D\overline{D}$ puis à celui de $A\overline{A}$ (qui est semblable à $D\overline{D}$).

II.5. Une condition suffisante de co-diagonalisibilité.

a. $B\overline{B} = (S^{-1}A\overline{S})(\overline{S}^{-1}\overline{A}S) = S^{-1}A\overline{A}S = \Lambda$ Or Λ est réelle,
donc $B\overline{B} = \overline{B\overline{B}} = \overline{B}B = \Lambda$.
Il vient alors $B\Lambda = B(B\overline{B}) = B(\overline{B}B) = (B\overline{B})B = \Lambda B$. *Ainsi Λ et B commutent.*

b. *Première méthode :* comme la matrice B commute avec la matrice Λ, les sous-espaces propres de Λ sont stables par B. En écrivant la base canonique de $\mathbb{R}^n$ sous la forme $c = (c_{1,1}, \ldots, c_{1,n_1}, c_{2,1}, \ldots, c_{2,n_2}, \ldots, c_{k,1}, \ldots, c_{k,n_k})$, les sous-espaces propres de Λ sont les $E_i = \mathrm{Vect}(c_{i,1}, \ldots, c_{i,n_i})$ pour $i \in \mathbb{N}_k$.
B stabilise les E_i, donc la matrice B s'écrit par blocs sous la forme proposée.
Seconde méthode : On décompose B et Λ sous la forme de matrices blocs : $B = (B_{i,j})$ et $\Lambda = (\Lambda_{i,j})_{1\le i,j\le r}$, où pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}_r^2$, $B_{i,j}, \Lambda_{i,j} \in \mathcal{M}_{\mathbb{R}}(n_i, n_j)$. En particulier, $\Lambda_{i,j} = \lambda_i \delta_{i,j} I_{n_i}$.
Alors le (i,j)-ème bloc de ΛB vaut $[\Lambda B]_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} \Lambda_{i,k} B_{k,j} = \sum_{k=1}^{r} \delta_{i,k}\lambda_i B_{k,j} = \lambda_i B_{i,j}$. De même, $[B\Lambda]_{i,j} = \lambda_j B_{i,j}$, or $B\Lambda = \Lambda B$, donc pour tout $i,j \in \mathbb{N}_r$, $(\lambda_i - \lambda_j)B_{i,j} = 0$, or lorsque $i \neq j$, $\lambda_i \neq \lambda_j$, donc pour $i \neq j$, $B_{i,j} = 0$, ce qui prouve que B est bien diagonale par blocs.

c. De $B\overline{B} = \Lambda$ on tire par blocs que $B_i\overline{B}_i = \lambda_i I_{n_i}$.
Si $\lambda_i > 0$ on en déduit par **II.3.b.** que $\frac{1}{\sqrt{\lambda_i}}B_i$ est co-semblable à I_{n_i} donc que B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$.
Comme $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots > \lambda_k \ge 0$ il vient que ceci est valable pour i de 1 à $k-1$.
Si $\lambda_k > 0$ c'est également vrai pour $i = k$.
Mais c'est encore vrai pour $i = k$ même si $\lambda_k = 0$. En effet dans ce cas il vient $\mathrm{rg}(A\overline{A}) = \mathrm{rg}(\Lambda) = n_1 + n_2 + \cdots + n_{k-1}$ et $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(B) = \mathrm{rg}(B_1) + \mathrm{rg}(B_2) + \cdots + \mathrm{rg}(B_k)$. Or pour $i \le k-1$, B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_1}$ donc $\mathrm{rg}(B_i) = n_i$. Comme par hypothèse $A\overline{A}$ et A ont même rang, il vient que $\mathrm{rg}(B_k) = 0$ donc que $B_k = 0$ et ainsi B_k (matrice nulle) est bien co-semblable $\sqrt{\lambda_k} I_{n_k}$ (matrice nulle).
Ainsi B_i est co-semblable à $\sqrt{\lambda_i} I_{n_i}$ pour tout i de 1 à k. Il en découle immédiatement par blocs que B est co-semblable à la matrice Δ obtenue à partir de Λ en remplaçant les λ_i par $\sqrt{\lambda_i}$.
Or A est co-semblable à B donc à Δ.
En résumé :

Les trois propriétés constituent une condition nécessaire et suffisante de co-diagonalisibilité.

II.6. Exemples.

a. Si A est symétrique réelle, on sait qu'elle est diagonalisable en base orthonormée, c'est-à-dire qu'il existe $P \in O(n)$ et D une matrice diagonale à coefficients réels tels que $A = PDP^{-1}$. Mais P est à coefficients réels, donc $A = PD\overline{P}^{-1}$ ce qui prouve que A est co-diagonalisable.

b.
◇ $Sp(A) = \{i\}$ et $A \neq iI_2$, donc A n'est pas diagonalisable.
$A\overline{A} = I_2$ donc la condition du II.5 est clairement satisfaite. *A est co-diagonalisable.*
◇ $\chi_B(X) = X^2 - 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 \neq 0$, donc B possède deux valeurs propres simples. Ainsi, B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
$B\overline{B} = 2\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ dont les valeurs propres ne sont pas réelles. *B n'est pas co-diagonalisable.*
◇ $Sp(C) = \{0\}$ et $C \neq 0$, donc C n'est pas diagonalisable.
$C\overline{C} = 0$ alors que C est de rang 1. *C n'est pas co-diagonalisable.*
◇ $\chi_D(X) = X^2 - 2X + 2$, de discriminant $\Delta = 4 - 8 \neq 0$, donc D possède deux valeurs propres simples. Ainsi, D est diagonalisable sur $\mathbb{C}$.
$D\overline{D} = 2I_2$ et la condition du II.5 est clairement satisfaite. *D est co-diagonalisable.*