

Résumé de cours :
Semaine 32, du 3 juin au 7 juin.

Espaces euclidiens (suite)

1 Orthogonalité (suite)

Notation. E est un espace préhilbertien. Son produit scalaire est noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1.1 En dimension finie

Propriété. Si E est de dimension finie, l'application $\begin{matrix} E & \longrightarrow & L(E, \mathbb{R}) \\ x & \longmapsto & \langle x, \cdot \rangle \end{matrix}$ est un isomorphisme.

Théorème. On ne suppose pas que E est de dimension finie. Si F est un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors F^\perp est l'unique supplémentaire orthogonal de F . De plus $F = (F^\perp)^\perp$.

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Un espace euclidien est un espace préhilbertien de dimension finie.

Hypothèse : jusqu'à la fin du paragraphe, E est supposé euclidien de dimension $n > 0$.

Propriété. Si F et G sont deux sous-espaces vectoriels de E , alors $(F \cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$.

Propriété. Si F est un sous-espace vectoriel de E , alors $\dim(F^\perp) = \dim E - \dim F$.

Propriété. Soit e une base orthonormée de E . Soient $x, y \in E$ dont les coordonnées dans la base e sont données sous forme de vecteurs colonnes notés X et Y . Alors $\langle x, y \rangle = {}^t Y X = {}^t X Y$.

Remarque. Si e est une base orthonormée de E , pour tout $u \in L(E)$, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $[\text{mat}(u, e)]_{i,j} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$.

La fin de ce paragraphe est hors programme.

Définition. La matrice du produit scalaire dans la base e est égale à

$$\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e) = (\langle e_i, e_j \rangle)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Propriété. e est orthogonale si et seulement si $\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e)$ est diagonale. e est orthonormée si et seulement si $\text{mat}(\langle \cdot, \cdot \rangle, e) = I_n$.

Formule. Soit e une base quelconque de E . On note Ω la matrice de $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base e . Soient x et y deux vecteurs de E , dont les coordonnées dans e sont données sous la forme des vecteurs colonnes X et Y de \mathbb{R}^n . Alors

$$\langle x, y \rangle = {}^t X \Omega Y = {}^t Y \Omega X = \sum_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} x_i y_j \omega_{i,j}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Définition. Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base

$e = (e_1, \dots, e_n)$ et soit φ une forme bilinéaire sur E .

La matrice de φ dans la base e est $\text{mat}(\varphi, e) = (\varphi(e_i, e_j))_{1 \leq i, j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Pour tout $x, y \in E$, en posant $X = \text{mat}_e(x)$ et $Y = \text{mat}_e(y)$, $\varphi(x, y) = {}^t X \Omega Y$.

φ est symétrique si et seulement si $\Omega \in S_n(\mathbb{K})$.

2 Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

Définition. Soit F un sous-espace vectoriel de E tel que $F \oplus F^\perp = E$. La **projection orthogonale** sur F est la projection sur F parallèlement à F^\perp . Dans ce chapitre, elle est notée p_F .

Remarque. Pour tout $x \in E$, $x - p_F(x) = p_{F^\perp}(x) \in F^\perp$.

Formule. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , muni d'une base orthonormée

$e = (e_1, \dots, e_n)$. Alors, pour tout $x \in E$,

$$p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle e_i, x \rangle e_i.$$

Il faut savoir le démontrer.

Théorème de la projection orthogonale :

Soient $a \in E$ et F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Alors, $d(a, F) = d(a, p_F(a))$.

Pour tout $y \in F \setminus \{p_F(a)\}$, $d(a, y) > d(a, F)$. $\|a\|^2 = \|p_F(a)\|^2 + d(a, F)^2$.

Si (e_1, \dots, e_n) est une base **orthonormée** de F , $\|a\|^2 \geq \sum_{i=1}^n \langle e_i, a \rangle^2$: inégalité de Bessel.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit $a \in E \setminus \{0\}$. On pose $H = a^\perp$. H est un hyperplan dont a est un vecteur **normal**.

Pour tout $x \in E$, $p_H(x) = x - \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a$ et, en notant s_H la symétrie orthogonale par rapport à H ,

$$s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a.$$

Propriété. On suppose que E est de dimension finie $n \geq 1$. Soit \mathcal{H} un hyperplan affine de E , passant par un point A et dirigé par l'hyperplan vectoriel H : Si \vec{n} est un vecteur non nul de H^\perp , on dit que

\vec{n} est un vecteur normal à \mathcal{H} . Dans ce cas, pour tout $M \in E$ $d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\langle \vec{n}, \overrightarrow{AM} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$.

Si \mathcal{H} a pour équation cartésienne $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = c$ dans un repère orthonormé, pour tout $M \in E$,

$$d(M, \mathcal{H}) = \frac{|\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i - c|}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}}, \text{ où } (x_1, \dots, x_n) \text{ sont les coordonnées de } M \text{ dans le repère.}$$

Il faut savoir le démontrer.

3 Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème. Orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ une famille **libre** de vecteurs de E . Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ telle que, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$,

- i) $e_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
 ii) et $\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ est définie par $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, x_k \rangle e_i$.

Il faut savoir le démontrer.

Interprétation matricielle du procédé de Gram-Schmidt.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x = (x_k)_{k \in \{1, \dots, n\}}$ une base de E .

Alors il existe une unique base orthonormée $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que la matrice de passage de e vers x est triangulaire supérieure, ses coefficients diagonaux étant de plus strictement positifs.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Si E est euclidien, il admet au moins une base orthonormée.

Toute une famille orthonormale de E peut être complétée en une base orthonormale de E .

Théorème. Orthonormalisation de Gram-Schmidt pour une famille infinie

Soient $(x_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une famille **libre** de vecteurs de E . Alors il existe une unique famille orthonormale de vecteurs $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

- i) $e_k \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$
 ii) et $\langle e_k, x_k \rangle \in \mathbb{R}_+^*$.

De plus, la famille $(e_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ est définie par : $e_k = \frac{E_k}{\|E_k\|}$, où $E_k = x_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle e_i, x_k \rangle e_i$.

4 Endomorphismes d'un espace euclidien E

4.1 Endomorphismes symétriques

Définition. $u \in L(E)$ est symétrique ssi $\forall (x, y) \in E^2, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle$.

Propriété. Soient e une base **orthonormée** de E et $u \in L(E)$.

Alors u est symétrique si et seulement si $\text{mat}(u, e)$ est symétrique.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. $S(E)$ est l'ensemble des endomorphismes symétriques de E .

C'est un sous-espace vectoriel de $L(E)$.

Propriété. Une projection est un endomorphisme symétrique ssi c'est une projection orthogonale.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Une symétrie est un endomorphisme symétrique ssi c'est une symétrie orthogonale.

Propriété. Si $u \in S(E)$ et si F est un sous-espace vectoriel stable par u , alors F^\perp est stable par u .

Théorème spectral : Si $u \in S(E)$, il existe au moins une base orthonormée de vecteurs propres de u . On dit que u est diagonalisable en base orthonormée.

4.2 Groupe orthogonal.

4.2.1 Caractérisations d'un automorphisme orthogonal.

Définition. Soit $u \in L(E)$. On dit que u est un **automorphisme orthogonal** ou une **isométrie vectorielle** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- conservation du produit scalaire : $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$;
- conservation de la norme : $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$.

- si e est une base orthonormée de E , en posant $M = \text{mat}(u, e)$,
 M inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Il faut savoir le démontrer.

Notation. On note $O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E .

Propriété. $O(E)$ est un sous-groupe de $(GL(E), \circ)$. On l'appelle le **groupe orthogonal** de E .

Propriété. Si $u \in O(E)$, $Sp_{\mathbb{R}}(u) \subset \{1, -1\}$.

Propriété. Soit $u \in O(E)$. Si F est un sous-espace vectoriel stable par u , F^{\perp} est stable par u .

4.2.2 Les rotations.

Propriété. Si $u \in O(E)$, alors $\det(u) \in \{-1, 1\}$, mais la réciproque est fausse.

Définition. Soit $u \in O(E)$. On dit que u est une **rotation** si et seulement si $\det(u) = 1$.
 u est une **isométrie vectorielle indirecte** ou négative si et seulement si $\det(u) = -1$.

Propriété. L'ensemble des rotations de E , noté $SO(E)$, est un sous-groupe de $O(E)$, appelé **groupe spécial orthogonal**. L'ensemble des isométries indirectes de E est noté $O^-(E) = O(E) \setminus SO(E)$. Il n'a pas de structure particulière.

4.2.3 Les symétries orthogonales

Propriété. La symétrie par rapport à F parallèlement à G (où $F \oplus G = E$) est un automorphisme orthogonal si et seulement si c'est une symétrie orthogonale (ie : $G = F^{\perp}$).

Propriété. Soit F un sous-espace vectoriel de E . Notons s la symétrie orthogonale par rapport à F . $s \in SO(E)$ si et seulement si $\dim(E) - \dim(F)$ est paire.

En particulier, si F est un hyperplan, $s \in O^-(E)$ et, dans ce cas, s est appelée une **réflexion**, et si $\dim(F) = \dim(E) - 2$, s est une rotation, et dans ce cas, s est appelée un **retournement**.

Définition. On dit que deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont perpendiculaires lorsque F^{\perp} et G^{\perp} sont orthogonaux, c'est-à-dire lorsque $G^{\perp} \subset F$.

4.2.4 Matrices orthogonales.

Propriété. Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. C'est une **matrice orthogonale** si et seulement si l'une des propriétés suivantes est vérifiée.

- ${}^t M M = I_n$;
- $M {}^t M = I_n$;
- M est inversible et $M^{-1} = {}^t M$.

Propriété. L'ensemble des matrices orthogonales est un sous-groupe de $GL_n(\mathbb{R})$ appelé le **groupe orthogonal de degré n** et noté $O(n)$.

Propriété. Pour tout $M \in O(n)$, $\det(M) \in \{-1, 1\}$.

Définition. Les matrices orthogonales de déterminant égal à 1 sont appelées les **matrices de rotations**. Les matrices orthogonales de déterminant égal à -1 sont appelées les matrices orthogonales gauches ou indirectes. L'ensemble des matrices de rotations est un sous-groupe de $O(n)$, appelé **groupe spécial orthogonal de degré n** et noté $SO(n)$. L'ensemble des matrices orthogonales indirectes est noté $O^-(n) = O(n) \setminus SO(n)$. Il n'a pas de structure particulière.

Propriété. $M \in O(n)$ si et seulement si la famille de ses vecteurs colonnes (ou de ses vecteurs lignes) est orthonormale dans \mathbb{R}^n muni de son produit scalaire canonique.

Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soient e une base orthonormée de E et e' une base quelconque de E .
 e' est orthonormée si et seulement si la matrice de passage de e à e' est orthogonale.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée de E .
 Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in O(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in O(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée.

Propriété. (Hors programme) Dans une matrice orthogonale droite, chaque coefficient est égal à son cofacteur. Dans une matrice orthogonale gauche, chaque coefficient est l'opposé de son cofacteur.

Propriété. Si $M \in S_n(\mathbb{R})$, il existe $P \in O(n)$ et D diagonale telles que $M = PDP^{-1} = PD^tP$.

4.2.5 Orientation d'un espace vectoriel réel.

Dans ce paragraphe, E est un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie $n > 0$, pour le moment non muni d'une structure euclidienne.

Notation. \mathcal{B} étant l'ensemble des bases de E , on convient que $\forall (e, e') \in \mathcal{B}^2, e\mathcal{R}e' \iff \det(P_e^{e'}) > 0$.

Propriété. \mathcal{R} est une relation d'équivalence sur \mathcal{B} .
 \mathcal{B}/\mathcal{R} est formé de deux éléments qui sont appelés les *orientations* de E .

“Orienter E ”, c'est choisir l'une de ces deux orientations qui devient l'ensemble des *bases directes*.

Hypothèse : jusqu'à la fin de ce chapitre, on suppose que E est un espace euclidien orienté de dimension $n > 0$.

Définition. Soit D une droite vectorielle incluse dans E que l'on oriente en choisissant un vecteur unitaire $\vec{k} \in D$. “Orienter l'hyperplan D^\perp par le vecteur \vec{k} de D ”, c'est choisir comme orientation de D^\perp l'ensemble des bases (e_1, \dots, e_{n-1}) de D^\perp telles que $(e_1, \dots, e_{n-1}, \vec{k})$ est une base directe de E .

Propriété. Soient e et e' deux bases orthonormées de E . On suppose que e est directe.
 Alors e' est directe si et seulement si $P_e^{e'} \in SO(n)$.

Propriété. Soient $u \in L(E)$ et e une base orthonormée directe de E .
 Les propriétés suivantes sont équivalentes.

- $u \in SO(E)$;
- $\text{mat}(u, e) \in SO(n)$;
- $u(e)$ est une base orthonormée directe.

4.2.6 Produit mixte.

Dans tout ce paragraphe, E désigne un espace euclidien **orienté** de dimension $n > 0$.

Définition. Soit $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$. Le *produit mixte* de (x_1, \dots, x_n) est $\det_e(x_1, \dots, x_n)$, où e est une base orthonormée directe quelconque de E . Il est noté $\det(x_1, \dots, x_n)$ ou encore $[x_1, \dots, x_n]$.

Remarque.

Si on change l'orientation de l'espace E , le produit mixte est changé en son opposé.

Propriété.

On suppose que $n = 2$. L'aire d'un parallélogramme $ABCD$ vaut $|\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})|$.

Propriété. On suppose que $n = 3$. Le volume d'un parallélépipède dont les côtés correspondent aux vecteurs u, v , et w vaut $|\det(u, v, w)|$.

5 Géométrie plane

Notation. E est un plan euclidien orienté dont (\vec{i}, \vec{j}) est une base orthonormée. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on notera $u_\alpha = \cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j}$.

5.1 Le groupe orthogonal de degré 2

Propriété.

$$SO(2) = \left\{ R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}. \quad O^-(2) = \left\{ S_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{pmatrix} / \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$, $R_\theta \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \alpha) \\ \sin(\theta + \alpha) \end{pmatrix}$ et $S_\theta \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \alpha) \\ \sin(\theta - \alpha) \end{pmatrix}$.

Formules : $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi}$, $R_\theta S_\varphi = S_{\theta+\varphi}$, $S_\theta S_\varphi = R_{\theta-\varphi}$, $S_\theta R_\varphi = S_{\theta-\varphi}$.

Il faut savoir le démontrer.

Formule. Pour tout $(\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$, $S_\theta^{-1} = S_\theta$ et $S_\alpha^{-1} R_\theta S_\alpha = R_{-\theta}$.

Propriété. L'application $\begin{matrix} (\mathbb{R}, +) & \longrightarrow & (SO(2), \times) \\ \theta & \longmapsto & R_\theta \end{matrix}$ est un morphisme surjectif de groupes. On en déduit que $(SO(2), \times)$ est un groupe commutatif.

Propriété. L'application $R_\theta \mapsto e^{i\theta}$ est un isomorphisme entre les groupes $(SO(2), \times)$ et \mathbb{U} .

5.2 Les isométries vectorielles du plan

Propriété. Soient $s \in O^-(E)$. Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $mat(s, e) = S_\theta$. s est la réflexion par rapport à la droite vectorielle $\mathbb{R}u_{\frac{\theta}{2}}$. Ainsi, les éléments de $O^-(E)$ sont les réflexions de E .

Définition. On suppose que E est orienté. Soit $r \in SO(E)$. La matrice R_θ de r dans une base orthonormée directe de E ne dépend pas du choix de cette base. θ est appelé l'angle de la rotation r , déterminé à 2π près. Si on change d'orientation, cette mesure est changée en son opposé.

5.3 Angles

Notation. E désigne un plan euclidien orienté.

Définition. Soient x et y deux vecteurs non nuls de E . L'angle orienté des vecteurs x et y est l'angle de l'unique rotation qui transforme $\frac{x}{\|x\|}$ en $\frac{y}{\|y\|}$. $\cos(\widehat{x, y}) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}$ et $\sin(\widehat{x, y}) = \frac{\det(x, y)}{\|x\|\|y\|}$.

Propriété. Les x_i désignant des vecteurs non nuls de E , on a les formules suivantes :

- ◇ Relation de Chasles : $\widehat{(x_1, x_2)} + \widehat{(x_2, x_3)} = \widehat{(x_1, x_3)}$.
- ◇ $\widehat{(x_2, x_1)} = -\widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ $\widehat{(x_1, x_2)} = 0 \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_+x_2$ et $\widehat{(x_1, x_2)} = \pi \iff \mathbb{R}_+x_1 = \mathbb{R}_-x_2$.
- ◇ Si r est une rotation, $\widehat{(r(x_1), r(x_2))} = \widehat{(x_1, x_2)}$.
- ◇ Si s est une réflexion, $\widehat{(s(x_1), s(x_2))} = -\widehat{(x_1, x_2)}$.

Définition. E est un espace préhilbertien quelconque. L'angle non orienté ou écart angulaire des vecteurs $x, y \in E$ est $\widehat{(x, y)} = \arccos\left(\frac{\langle x, y \rangle}{\|x\|\|y\|}\right) \in [0, \pi]$.

— Lorsque $\widehat{(x, y)} \in]0, \frac{\pi}{2}[$, cet angle est dit aigu ;

- Lorsque $\widehat{(x, y)} \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$, cet angle est dit obtus ;
- Lorsque $\widehat{(x, y)} = \frac{\pi}{2}$ (i.e lorsque $x \perp y$), on dit que c'est un angle droit ;
- Lorsque $\widehat{(x, y)} \in \{0, \pi\}$, on dit que c'est un angle plat :

5.4 Les droites affines du plan usuel

On se place dans un plan affine \mathcal{E} euclidien orienté.

Propriété. Les droites affines de \mathcal{E} ont pour équation : $ux + vy + w = 0$, où $(u, v) \neq 0$.

Le vecteur de coordonnées (u, v) est orthogonal à la droite.

Les droites non parallèles à \vec{j} admettent une équation de la forme $y = px + q$, p étant appelé la pente de la droite.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et orthogonale au vecteur (u, v) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) = 0$.

Propriété. La droite passant par le point de coordonnées (x_0, y_0) et dirigée par le vecteur (u, v) a pour équation $-v(x - x_0) + u(y - y_0) = 0 = \begin{vmatrix} u & x - x_0 \\ v & y - y_0 \end{vmatrix}$.

Propriété. La droite passant par les points (supposés distincts) de coordonnées (x_0, y_0) et (x_1, y_1) a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & x_1 - x_0 \\ y - y_0 & y_1 - y_0 \end{vmatrix} = 0$.

6 Géométrie dans l'espace

E est un espace euclidien orienté de dimension 3 et \mathcal{E} est un espace affine de direction E . On dit que \mathcal{E} est l'espace usuel. On fixe un repère de \mathcal{E} , noté $R = (O, e)$, où e une base orthonormée directe de E , notée $e = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ou $e = (e_1, e_2, e_3)$ selon les cas.

6.1 Le produit vectoriel (hors programme).

Définition. Si $a, b \in E$, $a \wedge b$ est l'unique vecteur de E tel que $\forall x \in E \det(a, b, x) = \langle a \wedge b, x \rangle$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. L'application $(a, b) \mapsto a \wedge b$ est bilinéaire et antisymétrique.

Propriété. Soit $(a, b) \in E^2$. (a, b) est un système lié si et seulement si $a \wedge b = 0$.
Il faut savoir le démontrer.

Propriété. Soit a et b deux vecteurs indépendants entre eux.

Alors $a \wedge b$ est un vecteur orthogonal à a et b tel que $(a, b, a \wedge b)$ est une base directe de l'espace. De plus $\|a \wedge b\| = \|a\| \|b\| \sin \phi$, où ϕ est l'angle non orienté entre a et b .

Formule. *Identité de Lagrange* : Pour tout $(a, b) \in E^2$, $\langle a, b \rangle^2 + \|a \wedge b\|^2 = \|a\|^2 \|b\|^2$.

Propriété. $e_1 \wedge e_2 = e_3 \quad e_2 \wedge e_3 = e_1 \quad e_3 \wedge e_1 = e_2$.

Formule. Si $a = \begin{vmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{vmatrix}_e$ et $b = \begin{vmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \end{vmatrix}_e$ alors $a \wedge b = \begin{vmatrix} \alpha_2 \beta_2 & \beta_2 \\ \alpha_3 \beta_3 & \beta_3 \\ -\alpha_1 \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_1 \beta_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 \beta_2 & \beta_2 \end{vmatrix}_e$.

Il faut savoir le démontrer.

6.2 Equation d'un plan

Propriété. Les plans affines de \mathcal{E} ont pour équation : $ux + vy + wz + t = 0$, où $(u, v, w) \neq 0$.

Le vecteur de coordonnées (u, v, w) est orthogonal (on dit aussi normal) au plan.

La direction du plan est le plan vectoriel d'équation $ux + vy + wz = 0$.

Propriété. Deux plans de \mathcal{E} d'équations $ux + vy + wz + t = 0$ et $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ sont parallèles si et seulement si les vecteurs normaux de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') sont colinéaires, donc si

et seulement si
$${}_e \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \wedge {}_e \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix} = 0.$$

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et orthogonal au vecteur (u, v, w) a pour équation $u(x - x_0) + v(y - y_0) + w(z - z_0) = 0$.

Propriété. Le plan passant par le point de coordonnées (x_0, y_0, z_0) et dirigé par deux vecteurs

indépendants de coordonnées (u, v, w) et (u', v', w') a pour équation cartésienne
$$\begin{vmatrix} x - x_0 & u & u' \\ y - y_0 & v & v' \\ z - z_0 & w & w' \end{vmatrix} = 0.$$

6.3 Système d'équations d'une droite

Propriété. Une droite affine de \mathcal{E} admet un système d'équations de la forme :

$$\begin{cases} ux + vy + wz + t = 0 \\ u'x + v'y + w'z + t' = 0 \end{cases},$$
 où $ux + vy + wz + t = 0$ et $u'x + v'y + w'z + t' = 0$ sont les équations

de deux plans affines non parallèles. Cette droite est dirigée par le vecteur
$${}_e \begin{vmatrix} u \\ v \\ w \end{vmatrix} \wedge {}_e \begin{vmatrix} u' \\ v' \\ w' \end{vmatrix}.$$