

DS 10 : un corrigé

Le barème comporte un total de 60 points.

Exercice (sur 7 points)

(sur 1 point) La partie entière étant nulle, la décomposition en éléments simples de $F(X) = \frac{1}{(X-1)^2(X^n-1)}$ est de la forme

$$F(X) = \frac{a}{X-1} + \frac{b}{(X-1)^2} + \frac{c}{(X-1)^3} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lambda_k}{X-\omega^k}, \text{ où } \omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}.$$

◇ (sur 1 point) Soit $k \in \mathbb{N}_{n-1}$. D'après le cours,

$$\lambda_k = \frac{1}{[(X-1)^2(X^n-1)]'(\omega^k)} = \frac{1}{[(X^n-1)2(X-1) + (X-1)^2nX^{n-1}](\omega^k)},$$

$$\text{donc } \lambda_k = \frac{1}{(\omega^k-1)^2n\omega^{kn-k}} = \frac{\omega^k}{n(\omega^k-1)^2} = \frac{e^{2ik\frac{\pi}{n}}}{ne^{2ik\frac{\pi}{n}}(e^{ik\frac{\pi}{n}}-e^{-ik\frac{\pi}{n}})^2} = \frac{1}{n(2i\sin\frac{k\pi}{n})^2},$$

$$\text{donc } \lambda_k = -\frac{1}{4n\sin^2\frac{k\pi}{n}}.$$

◇ (sur 1 point)

Pour calculer a , b et c , on procède par développement limité : D'après la décomposition de F en éléments simples, $(t-1)^3F(t) = c + b(t-1) + a(t-1)^2 + (t-1)^3G(t)$, où G est une application continue de \mathbb{R} dans \mathbb{C} . En particulier, G est bornée au voisinage de 1, donc $(t-1)^3F(t) = c + b(t-1) + a(t-1)^2 + o((t-1)^2)$.

$$\text{(sur 4 points) D'autre part, en posant } u = t-1, (t-1)^3F(t) = \frac{u^3}{u^2((u+1)^n-1)},$$

donc d'après la formule du binôme de Newton (le résultat reste vrai pour $n \in \{1, 2\}$),

$$(t-1)^3F(t) = \frac{u}{(nu + \frac{n(n-1)}{2}u^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{6}u^3 + o(u^3))} = \frac{1}{n}(1+x)^{-1},$$

$$\text{où } x = \frac{(n-1)}{2}u + \frac{(n-1)(n-2)}{6}u^2 + o(u^2) \text{ donc}$$

$$\begin{aligned}
(t-1)^3 F(t) &= \frac{1}{n}(1-x+x^2+o(x^2)) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1-n}{2}u + u^2\left(-\frac{(n-1)(n-2)}{6} + \frac{(n-1)^2}{4}\right) + o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1-n}{2}u + u^2\frac{n-1}{12}(-2(n-2) + 3(n-1)) + o(u^2)\right) \\
&= \frac{1}{n} + \frac{1-n}{2n}(t-1) + \frac{n^2-1}{12n}(t-1)^2 + o((t-1)^2).
\end{aligned}$$

Par unicité du développement limité, on en déduit que

$$c = \frac{1}{n} \text{ et } b = \frac{1-n}{2n} \text{ et } a = \frac{n^2-1}{12n}. \text{ En conclusion,}$$

$\frac{1}{(X-1)^2(X^n-1)} = \frac{n^2-1}{12n(X-1)} + \frac{1-n}{2n(X-1)^2} + \frac{1}{n(X-1)^3} - \frac{1}{4n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(\sin^2 \frac{k\pi}{n})(X - e^{2ik\frac{\pi}{n}})}$
--

Problème : Caractérisation des comatrices.

Partie I : Rang d'une comatrice (sur 10 points)

1°) (sur 1 point) Soit $i, j \in \mathbb{N}_n$. Notons M la matrice déduite de A en lui enlevant sa i -ème ligne et sa j -ème colonne. Alors M est une matrice de taille $n-1$,

donc d'après le cours, le (i, j) -ème coefficient de $c(\lambda A)$ vaut

$$[c(\lambda A)]_{i,j} = (-1)^{i+j} \det(\lambda M) = \lambda^{n-1} (-1)^{i+j} \det(M) = \lambda^{n-1} [c(A)]_{i,j}.$$

Ceci montre que $\boxed{c(\lambda A) = \lambda^{n-1} c(A)}$.

2°) (sur 1 point) Raisonnons par l'absurde en supposant que $c(A) \neq 0$. Ainsi, A admet un cofacteur non nul, donc on peut extraire de A une matrice inversible de taille $n-1$, mais $rg(A)$ est plus grand que le rang de toute matrice extraite de A , donc $rg(A) \geq n-1$, ce qui est faux. Ainsi, $c(A) = 0$.

3°) (sur 1 point) D'après le cours, $A {}^t c(A) = \det(A) I_n$, donc en prenant la transposée de cette égalité, $c(A) {}^t A = \det(A) I_n$, or A est supposée inversible, donc $\det(A) \neq 0$. Ainsi, l'égalité précédente montre que $c(A)$ est inversible à gauche, donc est globalement

inversible d'après le cours, d'inverse $\frac{1}{\det(A)} {}^t A$. Ainsi, $\boxed{rg(c(A)) = n}$.

4°) (sur 2 points) L'égalité précédente montre également que ${}^t A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} c(A)$,

donc $c(A) = \det(A) {}^t A^{-1}$, pour toute matrice inversible A .

En remplaçant dans cette égalité A par $c(A)$, on obtient $c(c(A)) = \det(c(A)) {}^t c(A)^{-1}$, mais on a aussi $\det(c(A)) = \det(\det(A) {}^t A^{-1}) = \det(A)^n \det(A^{-1}) = \det(A)^{n-1}$,

donc $c(c(A)) = \det(A)^{n-1} (\det(A) {}^t A^{-1})^{-1}$. Ainsi, $\boxed{c(c(A)) = \det(A)^{n-2} A}$.

5°) (sur 1 point)

Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. d'après la question 1, $c(c(\lambda A)) = c(\lambda^{n-1} c(A)) = \lambda^{(n-1)^2} c(c(A))$, donc d'après la question précédente, $c(c(\lambda A)) = \lambda^{(n-1)^2} \det(A)^{n-2} A$. Mais d'après le théorème

de d'Alembert, le polynôme $X^{(n-1)^2} - \det(A)^{2-n}$ possède au moins une racine (non nulle), donc il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ tel que $\lambda^{(n-1)^2} = \det(A)^{2-n}$. Alors, pour cette valeur de λ , $c(c(\lambda A)) = A$, ce qui montre qu'il existe $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $c(B) = A$.

6°) \diamond (sur 2 points) L'espace vectoriel engendré par les colonnes de A est de dimension $n - 1$, donc d'après le théorème de la base incomplète, on peut extraire des colonnes de A une base de $\text{Im}(A)$ de cardinal $n - 1$: il existe $j_0 \in \mathbb{N}_n$ tel que les colonnes de la matrice extraite $(A_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ j \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}}}$ est une base de $\text{Im}(A)$. En particulier, cette dernière matrice est de rang $n - 1$. Ses n lignes engendrent donc un espace de dimension $n - 1$, donc il existe $i_0 \in \mathbb{N}_n$ telle que les lignes de la matrice extraite $A' = (A_{i,j})_{\substack{i \in \mathbb{N}_n \setminus \{i_0\} \\ j \in \mathbb{N}_n \setminus \{j_0\}}}$ engendrent ce même espace. La matrice A' est donc de rang $n - 1$, or elle est de taille $n - 1$, donc c'est une matrice extraite de A de rang $n - 1$.

\diamond (sur 2 points) Avec les notations du point précédent, le cofacteur de A de position (i_0, j_0) est non nul, en tant que déterminant d'une matrice inversible, donc $c(A) \neq 0$.

\diamond A n'est pas inversible, donc $A {}^t c(A) = \det(A)I_n = 0$, donc $\text{Im}({}^t c(A)) \subset \text{Ker}(A)$.

Or d'après la formule du rang, $\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rg}(A) = 1$,

donc $\text{rg}(c(A)) = \text{rg}({}^t c(A)) \leq 1$. On a vu que $c(A) \neq 0$, donc $\text{rg}(A) = 1$.

Partie II : Le polynôme caractéristique (sur 17 points)

7°) (sur 2 points)

Notons φ l'application $\begin{array}{ccc} \mathbb{C}[X] & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array}$. $\varphi(1) = \varphi(X^0) = A^0 = I_n$.

Soient $P = \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n X^n \in \mathbb{C}[X]$, $Q = \sum_{n \in \mathbb{N}} c_n X^n \in \mathbb{C}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \diamond \quad \varphi(\alpha P) &= \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (\alpha b_n) A^n \\ &= \alpha \sum_{n \in \mathbb{N}} b_n A^n = \alpha \varphi(P). \end{aligned}$$

$$\diamond \quad \varphi(P + Q) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (b_n + c_n) A^n = \varphi(P) + \varphi(Q).$$

$$\diamond \quad \varphi(PQ) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) X^n \right) (A) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{k=0}^n (b_{n-k} c_k) \right) A^n. \text{ D'autre part, d'après}$$

les règles de calcul dans l'algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

$$\varphi(P)\varphi(Q) = \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} b_n A^n \right) \left(\sum_{n \in \mathbb{N}} c_n A^n \right) = \sum_{p,q \in \mathbb{N}} b_p c_q A^{p+q}, \text{ donc par sommation par pa-}$$

$$\text{quets, } \varphi(P)\varphi(Q) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \left(\sum_{p+q=n} b_p c_q \right) A^n. \text{ Ainsi, } \varphi(PQ) = \varphi(P)\varphi(Q).$$

En conclusion, φ est bien un morphisme d'algèbres.

8°) \diamond (sur 2 points) Soit $t \in \mathbb{C}$. $\chi_A(t) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^n (A_{j,\sigma(j)} - t\delta_{j,\sigma(j)})$, donc en identifiant polynômes formels de $\mathbb{C}[X]$ et applications polynomiales, χ_A est bien un polynôme de $\mathbb{C}[X]$.

De plus, pour tout $\sigma \in \mathcal{S}_n$, $\prod_{j=1}^n (A_{j,\sigma(j)} - X\delta_{j,\sigma(j)})$ est un polynôme de degré inférieur au cardinal de $\{i \in \mathbb{N}_n / \sigma(i) = i\}$, donc en particulier de degré strictement inférieur à n lorsque $\sigma \neq Id_{\mathbb{N}_n}$.

Ainsi, on peut mettre l'expression précédente de χ_A sous la forme :

$\chi_A(X) = \prod_{j=1}^n (A_{j,j} - X) + Q(X)$ avec $\deg(Q) < n$. Ceci prouve que χ_A est un polynôme

de degré n , dont le coefficient dominant est égal à $(-1)^n$.

\diamond (sur 1 point) $\chi_A(t) = 0 \iff A - tI_n \notin GL_n(\mathbb{C}) \iff [\exists X \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}, AX = tX] \iff t \in Sp(A)$, donc les racines de χ_A sont les valeurs propres de A .

\diamond (sur 1 point) On suppose qu'il existe $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice inversible telle que $B = PAP^{-1}$. Soit $t \in \mathbb{C}$. Alors $\chi_B(t) = \det(B - tI_n) = \det(P(A - tI_n)P^{-1}) = \det(A - tI_n) = \chi_A(t)$, car le déterminant est un invariant de similitude. Ainsi, $\chi_A = \chi_B$.

9°) (sur 1 point)

Soit $(j, k) \in \mathbb{N}_n^2$. Pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, notons $A_{i,j,k}$ le (j, k) -ème coefficient de A_i . Si $\sum_{i=0}^r t^i A_i = 0$, alors en prenant le (j, k) -ème coefficient, $\sum_{i=0}^r t^i A_{i,j,k} = 0$, donc $\sum_{i=0}^r X^i A_{i,j,k}$ est un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à r qui possède strictement plus de r racines. Ce polynôme est donc identiquement nul. On en déduit que, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $A_{i,j,k} = 0$. Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $A_i = 0$.

10°) (sur 2 points)

\diamond **Unicité.** Supposons qu'il existe R_0, \dots, R_{n-1} et S_0, \dots, S_{n-1} tels que, pour tout $t \in \mathbb{C}$, ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i = \sum_{i=0}^{n-1} t^i S_i$. Alors la quantité $\sum_{i=0}^{n-1} t^i (R_i - S_i)$ s'annule pour tout complexe t , donc, d'après la question précédente, pour tout $i \in \{0, \dots, r\}$, $R_i - S_i = 0$. Ceci prouve l'unicité.

\diamond **Lemme.** Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(i, j) \in \mathbb{N}_p^2$, soit $t \mapsto m_{i,j}(t)$ un polynôme à coefficients complexes de degré inférieur ou égal à 1.

Notons, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $M(t) = (m_{i,j}(t))_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p}} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$.

Pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\det(M(t)) = \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_p} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^p m_{j,\sigma(j)}(t)$, donc $t \mapsto \det(M(t))$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à p .

\diamond Soit $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. Le (i, j) -ème coefficient de la matrice ${}^t c(A - tI_n)$ est égal au cofacteur de position (j, i) de la matrice $A - tI_n$. Il s'agit donc du déterminant (au signe près) d'une matrice d'ordre $n - 1$ dont les coefficients sont des polynômes à coefficients

complexes de degré inférieur ou égal à 1. D'après le lemme, le (i, j) ème coefficient de la matrice ${}^t c(A - tI_n)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à $n - 1$, que l'on notera

$$P_{i,j}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} p_{i,j,k} t^k.$$

Ainsi, en posant, pour tout $k \in \{0, \dots, n - 1\}$, $R_k = (p_{i,j,k})_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$,

on obtient ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k$, ce qui prouve l'existence.

11°) (sur 2 points)

D'après le cours, $\boxed{(A - tI_n) {}^t c(A - tI_n) = \det(A - tI_n) I_n = \chi_A(t) I_n}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \chi_A(t) I_n &= (A - tI_n) \sum_{k=0}^{n-1} t^k R_k \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} t^k A R_k - \sum_{k=1}^n t^k R_{k-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} t^k (A R_k - R_{k-1}) + A R_0 - t^n R_{n-1}. \end{aligned}$$

Convenons de poser $\boxed{R_{-1} = 0 = R_n}$.

Alors, pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\chi_A(t) I_n = \sum_{k=0}^n t^k (A R_k - R_{k-1})$.

Ainsi, si l'on pose $\chi_A(X) = \sum_{k=0}^n \lambda_k X^k$, on a montré que,

pour tout $t \in \mathbb{C}$, $\sum_{k=0}^n t^k (\lambda_k I_n - A R_k + R_{k-1}) = 0$.

Alors, d'après la question 9, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $\boxed{\lambda_k I_n = A R_k - R_{k-1}}$.

◇ (sur 1 point) Ainsi, $\chi_A(A) = \sum_{k=0}^n \lambda_k A^k = \sum_{k=0}^n (A^{k+1} R_k - A^k R_{k-1})$. Il s'agit d'une somme télescopique, donc $\chi_A(A) = A^{n+1} R_n - R_{-1} = 0$, ce qui prouve le théorème de Cayley-Hamilton.

◇ (sur 2 points) $\chi_A(0) = \lambda_0$, donc $P(X) = - \sum_{k=1}^n \lambda_k X^{k-1}$. Ainsi,

$$P(A) = - \sum_{k=1}^n \lambda_k A^{k-1} = - \sum_{k=1}^n (A^k R_k - A^{k-1} R_{k-1}) = R_0.$$

Or ${}^t c(A - tI_n) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i R_i$, donc en remplaçant t par 0 dans cette égalité, on obtient

que $R_0 = {}^t c(A)$. On en déduit que $c(A) = {}^t P(A) = - \sum_{k=1}^n \lambda_k {}^t (A^{k-1}) = P({}^t A)$, car pour

tout $k \in \mathbb{N}$, ${}^t(A^k) = ({}^tA)^k$.

12° (sur 3 points) Supposons que 0 est la seule valeur propre de A . Alors d'après la question 8, χ_A est un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ de degré n , de coefficient dominant $(-1)^n$, admettant 0 comme seule racine. Ainsi, $\chi_A(X) = (-1)^n X^n$. Alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $A^n = (-1)^n \chi_A(A) = 0$.

Réciproquement, supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$. Soit λ une valeur propre de A . Il existe $X \in \mathbb{C}^n$ tel que $X \neq 0$ et $AX = \lambda X$. Par récurrence, on montre alors que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $A^k X = \lambda^k X$, donc en particulier, $\lambda^p X = A^p X = 0$. Or $X \neq 0$, donc $\lambda^p = 0$, donc $\lambda = 0$.

Partie III : Les matrices de rang 1 (sur 26 points)

13° (sur 1 point)

D'après la question 3, lorsque A est inversible, $c(A) = \det(A) ({}^tA)^{-1}$. Or MN est inversible, donc $c(MN) = \det(MN)({}^t(MN))^{-1}$, mais $\det(MN) = \det(M)\det(N)$ et $({}^t(MN))^{-1} = ({}^tN{}^tM)^{-1} = ({}^tM)^{-1}({}^tN)^{-1}$, donc $c(MN) = \det(M)\det(N){}^tM^{-1}{}^tN^{-1} = c(M)c(N)$.

14° (sur 2 points) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Le spectre de A est fini, car c'est l'ensemble des racines de χ_A qui est de degré n , donc $\{\frac{1}{k} / k \in \mathbb{N}^*\} \cap Sp(A)$ est fini. Ainsi, il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $k \geq N$, $\frac{1}{k} \notin Sp(A)$. Alors $(A - \frac{1}{k}I_n)_{k \geq N}$ est une suite de matrices inversibles qui tend vers A , ce qui conclut.

15° (sur 2 points) Soit $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. D'après la question précédente, il existe deux suites (M_p) et (N_p) de matrices inversibles qui tendent respectivement vers M et N .

L'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C})^2 & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ (A, B) & \longmapsto & AB \end{matrix}$ est bilinéaire en dimension finie, donc elle est continue. Ainsi, $M_p N_p \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} MN$.

◇ Les coefficients de $c(A)$ sont des fonctions polynômiales des coefficients de A , donc l'application $\begin{matrix} \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \\ A & \longmapsto & c(A) \end{matrix}$ est continue. Ainsi, $c(M_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} c(M)$, $c(N_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} c(N)$ et $c(M_p N_p) \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} c(MN)$. Mais d'après la question 13, pour tout $p \in \mathbb{N}$, $c(M_p N_p) = c(M_p)c(N_p)$, donc en faisant tendre p vers $+\infty$, on obtient, toujours grâce à la continuité du produit matriciel, que $c(MN) = c(M)c(N)$.

16° (sur 1 point) Supposons que M est un projecteur.

Alors $c(M)^2 = c(M^2) = c(M)$, donc $c(M)$ est aussi un projecteur.

17° ◇ (sur 2 points) A étant un projecteur, on sait que $\text{Ker}(A) \oplus \text{Im}(A) = \mathbb{C}^n$.

De plus, $\dim(\text{Im}(A)) = n - 1$. Ainsi il existe une base (e_1, \dots, e_{n-1}) de $\text{Im}(A)$ et e_n un vecteur non nul de $\text{Ker}(A)$. Alors d'après le cours, $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base de \mathbb{C}^n . Notons \tilde{A} l'endomorphisme canoniquement associé à A et $0_{p,q}$ la matrice nulle de $\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{C})$. Alors $\text{mat}(\tilde{A}, e) = \begin{pmatrix} I_{n-1} & 0_{n-1,1} \\ 0_{1,n-1} & 0 \end{pmatrix}$, donc $\chi_A(t) = (1 - t)^{n-1}(-t)$, en tant

que déterminant d'une matrice diagonale. Ainsi, $\boxed{\chi_A(t) = -t(1-t)^{n-1}}$.

◇ (sur 2 points) Si l'on reprend les notations de la question 11, $P(t) = (1-t)^{n-1}$, donc d'après les questions 7 et 11, $c(A) = P({}^tA) = (I_n - {}^tA)^{n-1}$, mais $A^2 = A$, donc $({}^tA)^2 = {}^tA$. Ainsi, tA est un projecteur. Alors $I_n - {}^tA$ est le projecteur associé à tA , donc $(I_n - {}^tA)^2 = I_n - {}^tA$. On en déduit que $\boxed{c(A) = I_n - {}^tA}$.

18°) (sur 1 point) Posons $A = I_n - {}^tM$. Dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{C}^n = \text{Im}(M) \oplus \text{Ker}(M)$, la matrice de M est $\begin{pmatrix} 1 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & 0_{n-1,n-1} \end{pmatrix}$, donc la matrice de A est $\begin{pmatrix} 0 & 0_{1,n-1} \\ 0_{n-1,1} & I_{n-1} \end{pmatrix}$. Ainsi A est un projecteur de rang $n-1$ et on peut appliquer les questions précédentes. En particulier, $c(A) = I_n - {}^tA = M$, ce qui conclut.

19°) (sur 2 points)

◇ M étant diagonalisable, il existe $P \in GL_n(\mathbb{C})$ et une matrice diagonale D de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $M = PDP^{-1}$. D étant diagonale, son rang est égal au nombre de coefficients diagonaux non nuls (c'est bien alors la dimension de l'espace vectoriel engendré par les colonnes de D), donc tous les coefficients de D sont nuls, sauf l'un des coefficients diagonaux, égal à $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Alors $\frac{1}{\lambda}D$ est une matrice de projecteur, donc $\left(\frac{1}{\lambda}M\right)^2 = \frac{1}{\lambda}M$, ce qui prouve que $\frac{1}{\lambda}M$ est un projecteur, que l'on notera p . Le rang de p est égal au rang de M , donc p est un projecteur de rang 1.

◇ D'après la question précédente, il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telle que $c(A) = p$.

D'après la question 1, pour tout $\mu \in \mathbb{C}^*$, $c(\mu A) = \mu^{n-1}c(A)$.

On peut choisir μ tel que $\mu^{n-1} = \lambda$, et dans ce cas, $c(\mu A) = \lambda p = M$, ce qui conclut.

20.a°) ◇ (sur 4 points) $\dim(\text{Ker}(A)) = n-1$. Notons (e_1, \dots, e_{n-1}) une base de $\text{Ker}(A)$, que l'on complète en une base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de \mathbb{C}^n . Dans cette base, la

matrice de A est de la forme $M = \begin{pmatrix} & \lambda_1 \\ 0_{n,n-1} & \vdots \\ & \lambda_n \end{pmatrix}$.

Supposons que $\lambda_n \neq 0$. D'après la question 8, $\chi_A = \chi_M = (\lambda_n - X)(-X)^{n-1}$, donc λ_n est une valeur propre non nulle de A . On sait que deux sous-espaces propres forment une somme directe, donc $\dim(\text{Ker}(A) \oplus \text{Ker}(A - \lambda_n I_n)) \geq (n-1) + 1 = n$. On en déduit que A est diagonalisable, ce qui est faux. Ainsi, $\lambda_n = 0$, ce qui signifie que $A(e_n) \in \text{Vect}(e_1, \dots, e_{n-1}) = \text{Ker}(A)$. On en déduit que $A^2(e_n) = 0$. Ainsi A^2 annule tous les vecteurs de e , ce qui prouve que $A^2 = 0$.

◇ (sur 2 points) Posons $e'_1 = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i e_i$. $e'_1 \neq 0$ car $A \neq 0$, donc on peut compléter (e'_1)

en une base de $\text{Ker}(A)$ notée (e'_1, \dots, e'_{n-1}) . Dans la base $(e'_1, \dots, e'_{n-1}, e_n)$, la matrice de A est égale à A_1 , car $u(e_n) = e'_1$. Ainsi, A et A_1 représentent le même endomorphisme dans des bases différentes, donc elles sont semblables.

20.b° (sur 2 points)

◇ Notons $b = (b_1, \dots, b_n)$ la base canonique de \mathbb{C}^n et u_1 l'endomorphisme de \mathbb{C}^n dont la matrice dans la base b est égale à D_1 .

$u_1(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $u_1(b_i) = b_i$ et $u_1(b_n) = -b_1$.

On en déduit que $u_1^2(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $u_1^2(b_i) = b_i$ et que $u_1^2(b_n) = 0$.

$$\text{Ainsi, } D_1^2 = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{D_1^2 - D_1 = A_1}.$$

◇ On vérifie que $u_1^3(b_1) = 0$, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $u_1^3(b_i) = b_i$ et que $u_1^3(b_n) = 0$, donc $D_1^3 = D_1^2$, puis $D_1 A_1 = D_1(D_1^2 - D_1) = D_1^3 - D_1^2 = 0$ et de même, $A_1 D_1 = 0$, donc $\boxed{D_1 A_1 = A_1 D_1 = 0}$.

◇ Les $n-1$ premières lignes de D_1 sont indépendantes et la dernière est nulle, donc $\boxed{rg(D_1) = n-1}$.

20.c° (sur 1 point)

◇ Il existe $Q \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que $A = Q A_1 Q^{-1}$. Posons $\boxed{D = Q D_1 Q^{-1}}$. On déduit des formules de la question précédente que $D^2 - D = A$ et $\boxed{AD = DA = 0}$.

$$\diamond I_n - D = Q(I_n - D_1)Q^{-1}, \text{ donc } rg(I_n - D) = rg(I_n - D_1) = rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

or cette matrice ne présente que deux colonnes non nulles, qui sont indépendantes, donc $\boxed{rg(I_n - D) = 2}$.

◇ On a vu que $D_1^3 = D_1^2$, donc $\boxed{D^3 = D^2}$.

20.d° (sur 3 points)

◇ D'après la question 8, $\chi_D = \chi_{D_1} = X^2(1-X)^{n-2}$, donc avec les notations de la question 11, $P = -X(1-X)^{n-2}$. On en déduit que

$$c(D) = P({}^t D) = -{}^t D (I_n - {}^t D)^{n-2} = -{}^t ((I_n - D)^{n-2} D) = -{}^t (Q(I_n - D_1)^{n-2} D_1 Q^{-1}).$$

Notons v l'endomorphisme canoniquement associé à $I_n - D_1$. Ainsi, $v(b_1) = b_1$, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $v(b_i) = 0$ et $v(b_n) = b_1 + b_n$. On en déduit par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $v^k(b_1) = b_1$, pour tout $i \in \{2, \dots, n-1\}$, $v^k(b_i) = 0$ et $v^k(b_n) = k b_1 + b_n$.

$$\text{Ainsi, } (I_n - D_1)^{n-2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = (n-2)A_1 + (I_n - D_1^2).$$

On en déduit que $(I_n - D_1)^{n-2} D_1 = D_1 - D_1^3 = D_1 - D_1^2 = -A_1$, donc $\boxed{c(D) = {}^t A}$.

◇ Vérifions que $c({}^t D) = {}^t c(D)$: soit $(i, j) \in \mathbb{N}_n^2$. Le coefficient de position (i, j) de $c({}^t D)$ est égal au cofacteur de position (i, j) de ${}^t D$, c'est-à-dire à

$$(-1)^{i+j} \det([\text{}^t D]_{h,k})_{\substack{h \neq i \\ k \neq j}} = (-1)^{i+j} \det((D_{k,h})_{\substack{h \neq i \\ k \neq j}}) = [c(D)]_{j,i}, \text{ ce qui conclut.}$$

Alors $c({}^t D) = A$, ce qu'il fallait démontrer.

21°) (sur 1 point)

On dira que A est une comatrice si et seulement si $A \in \{c(B) / B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$.

Si A est une comatrice, d'après la partie I, son rang vaut 0, 1 ou n . Réciproquement, si A est une matrice de rang 0, c'est la comatrice de la matrice nulle, si $rg(A) = 1$, c'est une comatrice d'après les questions 19 et 20, et si A est inversible, c'est une comatrice d'après la question 5.

En conclusion, $\{c(A) / A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})\}$ est l'ensemble des matrices de rang 0,1 ou n .