Feuille d'exercices 25.
Corrigé de quelques exercices

Exercice 25.15 :

1°) A est symétrique, donc il existe $P \in O(p)$ et une matrice diagonale $D = diag(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ telles que $A = PDP^{-1} = PD^tP$.
De plus, A est définie positive, donc, pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $\lambda_i \in Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$.
Posons $\Delta = diag(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_p})$ et $R(A) = P\Delta^tP = P\Delta P^{-1}$.
${}^tR(A) = P^t\Delta^tP = R(A)$, donc $R(A)$ est symétrique.
De plus, $Sp(R(A)) = Sp(\Delta) = \{\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_p}\} \subset \mathbb{R}_+^*$, donc $R(A)$ est définie positive.
Enfin, $R(A)^2 = P\Delta^2P^{-1} = A$.

2°) $\diamond$ Notons $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \frac{1}{2}(x + \frac{\lambda}{x}) \end{array}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
On remarque que $f(\mathbb{R}_+^*) \subset \mathbb{R}_+^*$, or $u_0 > 0$, donc par récurrence, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est correctement défini et appartient à $\mathbb{R}_+^*$.
$\diamond$ f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2}(1 - \frac{\lambda}{x^2})$,
donc $f'(x) > 0 \iff x > \sqrt{\lambda}$. Traçons le tableau de variations de f.

x	0		$\sqrt{\lambda}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{\lambda}$	$\nearrow$	$+\infty$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}(\frac{\lambda}{u_n} - u_n) = \frac{1}{2u_n}(\lambda - u_n^2) \le 0$. Ainsi, $(u_n)_{n\ge1}$ est une suite décroissante, minorée par $\sqrt{\lambda}$. Elle converge donc vers un réel $l \in [\sqrt{\lambda}, +\infty[$.
f étant continue en l, $l = f(l)$, donc $0 = f(l) - l = \frac{1}{2l}(\lambda - l^2)$, donc $l = \sqrt{\lambda}$.
En conclusion, $\boxed{(u_n)_{n\ge1} \text{ est une suite décroissante qui tend vers } \sqrt{\lambda}}$.

3°) [La suite $\Delta_n = P^{-1}X_nP$ vérifie les relations $\Delta_0 = I_p$ et $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$, donc c'est une suite de matrices diagonales. Si l'on note $u_{i,n}$ le $i^{\text{ème}}$ coefficient diagonal de Δ_n, la suite $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la relation de récurrence de la question précédente, donc elle tend vers $\sqrt{\lambda_i}$, ce qui permet de conclure.
Pour gérer correctement les problèmes d'existence de ces matrices, il est plus simple de commencer par construire les suites $(u_{i,n})$, puis de construire D_n et X_n.]

$\diamond$ Reprenons les notations de la première question. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, notons $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de réels définie par les relations suivantes : $u_{i,0} = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, (1) : $u_{i,n+1} = \frac{1}{2}(u_{i,n} + \frac{\lambda_i}{u_{i,n}})$.
D'après la seconde question, $(u_{i,n})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est correctement définie et elle converge vers $\sqrt{\lambda_i}$ lorsque n tend vers $+\infty$.
$\diamond$ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $\Delta_n = diag(u_{1,n}, \dots, u_{p,n})$ et $R_n = P\Delta_n P^{-1}$. La suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers Δ, or l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_p(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & PMP^{-1} \end{array}$ est continue (elle est linéaire en dimension finie), donc $R_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} P\Delta P^{-1} = R(A)$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. Pour tout $i \in \mathbb{N}_p$, $u_{i,n} > 0$, donc Δ_n est inversible et, d'après la relation (1), $\Delta_{n+1} = \frac{1}{2}(\Delta_n + D\Delta_n^{-1})$. En multipliant par P à gauche et par P^{-1} à droite, on en déduit que R_n est inversible et que $R_{n+1} = \frac{1}{2}(R_n + AR_n^{-1})$.
De plus $\Delta_0 = diag(1, \dots, 1) = I_p$, donc $R_0 = I_p$.
Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $R_n = X_n$, ce qui montre que la suite (X_n) de l'énoncé est correctement définie et qu'elle converge vers $R(A)$.

Exercice 25.21 :

1°)
• La linéarité de l'intégrale permet de prouver que :
$$\begin{cases} <\alpha P + \beta Q, R> & = \alpha <P, R> + \beta <Q, R> \\ \text{et } <P, \alpha Q + \beta R> & = \alpha <P, Q> + \beta <P, R>. \end{cases}$$
Ainsi, l'application $< .,. >$ est bilinéaire.
• Clairement, pour tout $(P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, $<Q, P> = <P, Q>$.
Ainsi, l'application $< .,. >$ est symétrique.
• Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $<P, P> = \int_a^b f(t)|P(t)|^2 dt \geq 0$, car f est à valeurs positives.
Ainsi, l'application $< .,. >$ est positive.
• Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $<P, P> = 0$. L'application $\begin{array}{ccc} [a, b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)|P(t)|^2 \end{array}$ est continue, positive et d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle. Or f ne s'annule en aucun point, donc, pour tout $t \in [a, b]$, $P(t) = 0$. Donc P admet une infinité de racines, ce qui prouve que P est nul. Ainsi $< .,. >$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

2°)
• Soit (Q_n) une famille orthonormée de polynômes de $\mathbb{R}[X]$.
Montrons que (1) : $(\forall n \in \mathbb{N}\ deg(Q_n) = n) \iff (\forall n \in \mathbb{N}\ Q_n \in Vect(1, X, \dots, X^n))$.
L'implication " $\Longrightarrow$" est claire.
Réciproquement, supposons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $Q_n \in Vect(1, X, \dots, X^n)$.
Lorsque $n = 0$, $Q_0 \in Vect(1)$, donc Q_0 est un polynôme constant.
Or $Q_0 \neq 0$, car $<Q_0, Q_0> = 1 \neq 0$. Ainsi, $deg(Q_0) = 0$.
Lorsque $n \geq 0$, supposons que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $deg(Q_k) = k$, et démontrons que $deg(Q_{n+1}) = n + 1$.

Sinon, $Q_{n+1} \in Vect(1, X, \dots, X^n)$, donc $(Q_0, \dots, Q_{n+1})$ est une famille libre (car orthonormée) de vecteurs de $\mathbb{R}_n[X]$.
On en déduirait que $n+2 = card(\{Q_0, \dots, Q_{n+1}\}) \leq dim(\mathbb{R}_n[X]) = n+1$, ce qui est faux. Ainsi, $deg(Q_{n+1}) = n+1$.
- Le théorème d'orthonormalisation de Gram-Schmidt, joint à l'équivalence (1) démontre l'existence et l'unicité demandée par l'énoncé.

3°) a)
- P_n est à coefficients réels, donc $P_n(\overline{\alpha}) = 0$.

Ainsi, α et $\overline{\alpha}$ sont deux racines distinctes de P_n. Ceci prouve que $T = (X-\alpha)(X-\overline{\alpha})$ divise P_n.
Or $T = X^2 - (\alpha + \overline{\alpha})X + |\alpha|^2$, donc T est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 2, unitaire et irréductible.
De plus, il existe $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P_n = TP$, et $deg(P) = deg(P_n) - deg(T) = n-2$.
- $\displaystyle\int_a^b f(t)T(t)P(t)^2 dt = < P, P_n >$, or $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X] = Vect(P_0, \dots, P_{n-2})$, et $(P_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille orthonormée, donc $< P, P_n >= 0$.

Ainsi, l'application $\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)T(t)P(t)^2 \end{array}$ est positive, continue et d'intégrale nulle, donc elle est identiquement nulle. Or f et T ne s'annulent en aucun réel de $[a,b]$, donc $P = 0$. On en déduit que $P_n = 0$, ce qui est faux car $deg(P_n) = n \geq 0$.
b)
- Supposons que P_n admet au moins une racine multiple, notée α.

Alors, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-2}[X]$ tel que $Q_n = TP$, où $T = (X-\alpha)^2$, puis on raisonne comme au a).
- Supposons que P_n admet au moins une racine α qui n'appartient pas à l'intervalle $]a,b[$.

Alors, il existe $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $Q_n = TP$, où $T = (X-\alpha)$, puis on peut raisonner comme au a), car l'application $\begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & f(t)T(t)P(t)^2 \end{array}$ est de signe constant (au sens large).

4°) $XP_{n+1} \in \mathbb{R}_{n+2}[X]$ et $(P_0, \dots, P_{n+2})$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}_{n+2}[X]$, donc $XP_{n+1} = \displaystyle\sum_{i=0}^{n+2} < P_i, XP_{n+1} > P_i$.

Soit $i \in \{0, \dots, n-1\}$: $< P_i, XP_{n+1} >= \displaystyle\int_a^b f(t)P_i(t)XP_{n+1}(t) = < XP_i, P_{n+1} >$,
or $deg(XP_i) = i+1 < n+1 = deg(P_{n+1})$, donc $< XP_i, P_{n+1} >= 0$.
Ainsi, pour tout $i \in \{0, \dots, n-1\}$, $< P_i, XP_{n+1} >= 0$, ce qui prouve que
$XP_{n+1} = < P_n, XP_{n+1} > P_n + < P_{n+1}, XP_{n+1} > P_{n+1} + < P_{n+2}, XP_{n+1} > P_{n+2}$.