

I-Characterisation des matrices symétriques définies positives

— I-A.1.2 :

◇ Supposons que A est positive (resp : définie positive).

Soit $\lambda \in Sp(A)$, alors $\exists X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$ non nul tel que $AX = \lambda X$, donc ${}^tXAX = \lambda {}^tXX = \lambda \|X\|^2$, or $\|X\|^2 > 0$, donc $\lambda = \frac{{}^tXAX}{{}^tXX}$.

Si A est positive, alors $\lambda \geq 0$ et si A est définie positive, on aura $\lambda > 0$.

Réciproquement, supposons que $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$ (respectivement : $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$) : A étant symétrique réelle, elle est orthodiagonalisable d'après le théorème spectral, donc il existe $P \in O_n$ et $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

telles que $A = PD^tP = PDP^{-1}$, donc $\forall X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$, ${}^tXAX = {}^t({}^tPX)D({}^tPX) = \sum_{i=1}^n \lambda_i y_i^2$ où on a posé

$${}^tPX = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \text{ De plus } \{\lambda_i/i \in \{1, \dots, n\}\} = Sp(D) = Sp(A).$$

Donc : si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+$, alors ${}^tXAX \geq 0$ et si $Sp(A) \subset \mathbb{R}_+^*$, alors vu que X est non nul et que tP est inversible, tPX est aussi non nul, donc il existe $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $y_j \neq 0$, et par suite ${}^tXAX \geq \lambda_j y_j^2 > 0$. On a ainsi le résultat demandé.

— I-B.1 : Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ que nous supposons définie positive et soit $X_i \in M_{i,1}(\mathbb{R})$ non nul, alors en posant

$X = \begin{pmatrix} X_i \\ O \end{pmatrix}$ où $O \in M_{n-i,1}(\mathbb{R})$, on aura par produit de matrices par blocs : ${}^tX_i A^{(i)} X_i = {}^tXAX > 0$, donc $A^{(i)}$ est définie positive pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

— On déduit donc que $\det(A^{(i)}) = \prod_{k=1}^i \mu_k > 0$ où μ_1, \dots, μ_i sont les valeurs propres de $A^{(i)}$ qui sont strictement positifs.

— I-B.2 :

— Cas $n = 1$

Soit $A = (a)$ tel que $a > 0$, donc $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $ax^2 > 0$, donc A est définie positive.

— Cas $n = 2$

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ tel que $a > 0$ et $ac - b^2 > 0$. Notons λ et μ les valeurs propres de A .

Ainsi $ac \geq b^2 \geq 0$, donc a et c ont le même signe, or $a > 0$, donc $\lambda + \mu = \text{Tr}(A) = a + c > 0$. De plus $\lambda\mu = ac - b^2 > 0$, donc λ et μ ont le même signe, qui est donc celui de leur somme, donc $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, ce qui entraîne d'après I - A.2, que A est définie positive.

— I-B.3 : Soit $A \in S_{n+1}(\mathbb{R})$ tel que pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $\det(A^{(i)}) > 0$. On suppose que A n'est pas définie positive. Notons $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ les valeurs propres de A , comptées avec multiplicités. Il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_{n+1}) telle que, pour tout $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, $Ae_i = \lambda_i e_i$.

— (a) : D'après I - A.2, il existe j tel que $\lambda_j \leq 0$, mais si $\lambda_j = 0$ alors $\det(A) = \det(A^{(n+1)}) = 0$ ce qui contredit l'hypothèse. Ainsi $\lambda_j < 0$.

$\det(A) > 0$ donc $\prod_{i \neq j} \lambda_i < 0$, donc il existe k tel que $\lambda_k < 0$. Alors e_j et e_k sont deux vecteurs propres linéairement indépendants associés à λ_j et λ_k respectivement.

— (b) : Soient $V_1, V_2 \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ des vecteurs propres orthonormaux associés aux deux valeurs propres λ_1, λ_2 strictement négatives de la question précédente. Notons a, b les dernières composantes de V_1 et V_2 respectivement.

Si $ab = 0$, alors l'un des deux vecteurs répond à la question, on obtient ${}^tV_1AV_1 = \lambda_1 \|V_1\|^2 = \lambda_1 < 0$ ou ${}^tV_2AV_2 = \lambda_2 \|V_2\|^2 = \lambda_2 < 0$.

Si $ab \neq 0$. La dernière composante du vecteur $V = bV_1 - aV_2$ est nulle et

on a alors ${}^tVAV = \langle V, AV \rangle_{\mathbb{R}^{n+1}} = \langle bV_1 - aV_2, b\lambda_1 V_1 - a\lambda_2 V_2 \rangle$, or V_1 et V_2 sont orthogonaux, donc ${}^tVAV = b^2\lambda_1 + a^2\lambda_2 < 0$.

On conclut donc à l'existence d'un vecteur $X \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ de dernière composante nulle qui vérifie ${}^tXAX < 0$.

— (c) : Posons $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ O \end{pmatrix} \in M_{n+1,1}(\mathbb{R})$ tel que $X_1 \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. On a ${}^tXAX = {}^tX_1 A^{(n)} X_1 < 0$, ce qui contredit le fait que $A^{(n)}$ est définie positive.

— I-C : On a clairement équivalence lorsque $n = 1$.

Lorsque $n \geq 2$, l'implication directe est toujours vraie mais la réciproque est fautive grâce à l'exemple

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
 dans lequel on a $\det(A^{(i)}) = 0$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, mais $S_p(A) = \{0, -1\}$,
 donc A n'est pas définie positive.

II-Étude d'une suite de polynômes

II-A : On vérifie que $\langle \lambda P + Q, R \rangle = \lambda \langle P, R \rangle + \langle Q, R \rangle$ et $\langle P, Q \rangle = \langle Q, P \rangle$, donc $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bilinéaire et symétrique. De plus $\langle P, P \rangle \geq 0$, et si $\langle P, P \rangle = 0$, alors $t \mapsto P(t)^2$ est positive, continue et d'intégrale nulle sur $[0, 1]$, donc pour tout $t \in [0, 1]$, $P(t) = 0$, donc P est nul car c'est un polynôme possédant une infinité de racines.

Ainsi $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est bien un produit scalaire.

II-B : On a $\deg(P_n) = 2n$, donc $\deg(P_n^{(n)}) = 2n - n = n$.

Au voisinage de 1 on a $P_n \sim (X - 1)^n$, donc $P_n = (X - 1)^n + o((X - 1)^n)$, ce qui entraîne d'après la formule de Taylor-Young que $\frac{P_n^{(n)}(1)}{n!} = 1$, donc $P_n^{(n)}(1) = n!$.

II-C : Intégrons par parties : $n! \langle Q, L_n \rangle = \int_0^1 Q(t)P_n^{(n)}(t)dt = [Q(t)P_n^{(n-1)}(t)]_0^1 - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$,
 or 0 et 1 sont racines de P_n de multiplicités n ,

donc $P_n^{(n-1)}(0) = P_n^{(n-1)}(1) = 0$, donc $n! \langle Q, L_n \rangle = - \int_0^1 Q'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$.

En effectuant des intégrations par parties successives, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $n! \langle Q, L_n \rangle = (-1)^k \int_0^1 Q^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}(t)dt$.

En particulier, avec $k = n$, on obtient $n! \langle Q, L_n \rangle = (-1)^n \int_0^1 Q^{(n)}(t)P_n(t)dt$ mais lorsque $\deg(Q) \leq n - 1$, on a $Q^{(n)} = 0$, donc $\langle Q, L_n \rangle = 0$.

II-D.1 : Une succession d'intégrations par parties donne

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1}(x-1)^n \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{n}{n+1} x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx \\
 &= -\frac{n}{n+1} \int_0^1 x^{n+1}(x-1)^{n-1} dx = \dots = (-1)^k \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{(n+1)(n+2)\dots(n+k)} \int_0^1 x^{n+k}(x-1)^{n-k} dx, \\
 \text{soit pour } k = n : I_n &= \int_0^1 x^n(x-1)^n dx = (-1)^n \frac{(n!)^2}{(2n)!} \int_0^1 x^{2n} dx, \text{ donc } I_n = \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}.
 \end{aligned}$$

II-D.2 : Le début du calcul du II.C dans lequel on remplace Q par $L_n = \frac{1}{n!}P_n^{(n)}$ donne :

$$\langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \int_0^1 P_n^{(2n)} P_n, \text{ or } P_n^{(2n)} = (2n)!,$$

$$\text{donc } \langle L_n, L_n \rangle = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} I_n = \frac{(-1)^n (2n)!}{(n!)^2} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{1}{2n+1}.$$

II-E :

\diamond On a $\forall n > m$, $L_m \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, donc d'après la question II - C, $\langle L_n, L_m \rangle = 0$.

De plus d'après la question précédente $\|L_n\| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$. Ce qui entraîne que si on pose

$K_n = \frac{L_n}{\|L_n\|} = \sqrt{2n+1}L_n$, alors la famille (K_n) répond à la question, sachant que le coefficient dominant de K_n est $\sqrt{2n+1} \frac{(2n)!}{(n!)^2} > 0$.

\diamond Supposons que $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une seconde famille de polynômes vérifiant $i)$ et $ii)$.

Q_0 est un polynôme constant de norme 1 et strictement positif, tout comme K_0 , donc $Q_0 = K_0$.

Fixons $N \in \mathbb{N}^*$. La famille $(Q_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est une famille orthonormée incluse dans $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ de cardinal N , donc c'est une base de $\mathbb{R}_{N-1}[X]$. Or Q_N est orthogonal à Q_0, \dots, Q_{N-1} , donc $Q_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$ et de même, $K_N \in \mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$, or $\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]$ est l'orthogonal de $\mathbb{R}_{N-1}[X]$ en considérant $\mathbb{R}_N[X]$ comme l'espace global, donc $\dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]^\perp \cap \mathbb{R}_N[X]) = \dim(\mathbb{R}_N[X]) - \dim(\mathbb{R}_{N-1}[X]) = 1$. Ainsi Q_N et K_N sont tous deux sur une même droite vectorielle, donc il existe α tel que $Q_N = \alpha K_N$. Mais Q_N et K_N sont de norme 1, donc $|\alpha| = 1$. De plus les coefficients dominants de K_N et Q_N sont strictement positifs, donc $\alpha = 1$. Ainsi, $Q_N = K_N$ et l'on a prouvé l'unicité.

II-F : $L_0 = 1$, $L_1 = 2X - 1$, $L_2 = 6X^2 - 6X + 1$ ce qui donne $K_0 = 1$, $K_1 = \sqrt{3}(2X - 1)$ et $K_3 = \sqrt{5}(6X^2 - 6X + 1)$.

III-Matrices de Hilbert.

— **III-A.Étude de quelques propriétés de H_n .**

— **III-A.1 :** $H_2 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, H_3 = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}, H_2^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ -6 & 12 \end{pmatrix}, H_3^{-1} = \begin{pmatrix} 9 & -36 & 30 \\ -36 & 192 & -180 \\ 30 & -180 & 180 \end{pmatrix}$

— **III-A.2 :** Soit la fraction définie par $F(X) = \alpha \frac{X(X-1)\dots(X-n+1)}{(X+1)(X+2)\dots(X+n+1)} = \frac{a_1}{X+1} + \frac{a_2}{X+2} + \dots + \frac{a_{n+1}}{X+n+1}$, avec pour tout $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$, a_k le résidu associé au pôle simple $-k$ donné par

$$a_k = \alpha \frac{-k(-k-1)\dots(-k-n+1)}{\prod_{\substack{j \neq k \\ 1 \leq j \leq n+1}} (-k+j)} = (-1)^{n-k+1} \alpha \frac{(n-1+k)!}{((k-1)!)^2(n+1-k)!}.$$

On choisit α tel que $a_{n+1} = \alpha \frac{(2n)!}{(n!)^2} = 1$, c'est à dire $\alpha = \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

L'opération élémentaire sur les colonnes de Δ_{n+1} donnée par $C_{n+1} \leftarrow C_{n+1} + \sum_{k=1}^n a_k C_k$ amène à

$$\Delta_{n+1} = \begin{vmatrix} & & F(0) \\ \Delta_n & & F(1) \\ & & \vdots \\ * & \dots & * & F(n) \end{vmatrix}, \text{ or } F(0) = F(1) = \dots = F(n-1) = 0,$$

donc $\Delta_{n+1} = F(n)\Delta_n = \alpha \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} \Delta_n = \frac{(n!)^4}{(2n)!(2n+1)!} \Delta_n$.

— **III-A.3 :** La relation de récurrence précédente conduit à $\Delta_n = \frac{((n-1)!(n-2)! \dots 1!)^4}{(2n-1)!(2n-2)! \dots 3!2!} \Delta_1 = \frac{c_n^4}{c_{2n}}$.

— **III-A.4 :**

— $\det(H_n) = \Delta_n = \frac{c_n^4}{c_{2n}} > 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

— La relation de récurrence $\det(H_{n+1}^{-1}) = \frac{(2n)!(2n+1)!}{(n!)^4} \det(H_n^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1})$ nous invite à utiliser une récurrence simple.

Pour $n = 1$, $\det(H_1^{-1}) = 1 \in \mathbb{N}$ et si on suppose que $\det(H_n) \in \mathbb{N}$, alors :

$$\det(H_{n+1}^{-1}) = (2n+1) \binom{2n}{n}^2 \det(H_n^{-1}) \in \mathbb{N}, \text{ ce qui établit la récurrence.}$$

— **III-A.5 :** Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\det(H_n^{(k)}) = \det(H_k) = \Delta_k > 0$, et H_n est symétrique, donc d'après la question I - B, la matrice H_n est définie positive, de plus elle est diagonalisable, donc ses valeurs propres sont au nombre de n et $Sp(H_n) \subset \mathbb{R}^{*+}$.

— **III-B : Approximations au sens des moindres carrés.**

— **III-B.1 :** $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous espace vectoriel de $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ de dimension finie, donc le théorème de la projection orthogonale assure que pour tout $f \in C^0([0, 1], \mathbb{R})$, il existe $p(f) = \Pi_n \in \mathbb{R}_n[X]$ la projection orthogonale de f sur $\mathbb{R}_n[X]$ tel que $\min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|) = d(f, \mathbb{R}_n[X]) = \|\Pi_n - f\|$.

— **III-B.2 :** $\mathbb{R}_{n-1}[X] \subset \mathbb{R}_n[X]$, donc $\min_{Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]} (\|Q - f\|) \geq \min_{Q \in \mathbb{R}_n[X]} (\|Q - f\|)$, c'est à dire $\|\Pi_{n-1} - f\| \geq \|\Pi_n - f\|$ ce qui traduit la décroissance de la suite $(\|\Pi_n - f\|)_n$.

— **III-B.3 :**

◊ Posons $e_k(X) = X^{k-1}$, alors (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ et on a

$\langle e_i, e_j \rangle = \int_0^1 e_i e_j = \int_0^1 t^{i+j-2} dt = \frac{1}{i+j-1} = (H_n)_{i,j}$, donc la matrice H_n est la matrice du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

◊ Soit $i, j \in \{0, \dots, n-1\}$. Ici, les lignes et colonnes de H_n sont numérotées de 0 à $n-1$.

$[H_n]_{i,j} = \langle X^i, X^j \rangle$, or par définition de la matrice de passage P^{-1} de la base (K_0, \dots, K_{n-1}) vers la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$, $X^i = \sum_{k=0}^{n-1} [P^{-1}]_{k,i} K_k$, or la base (K_0, \dots, K_{n-1}) est orthonormée,

donc $[H_n]_{i,j} = \sum_{k=0}^{n-1} [P^{-1}]_{k,i} [P^{-1}]_{k,j} = [{}^t P^{-1} P^{-1}]_{i,j}$, ce qui montre que $H_n = {}^t P^{-1} P^{-1}$.

— **III-B.4** Posons $\Pi_n = \sum_{j=0}^n a_j X^j = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} X^{j-1}$.

On sait que $f - \Pi_n \in (\mathbb{R}_n[X])^\perp$, donc $\forall k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket \langle f - \Pi_n, X^{k-1} \rangle = 0$, ce qui donne

$$\langle f, X^{k-1} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} \langle X^{j-1}, X^{k-1} \rangle = \sum_{j=1}^{n+1} a_{j-1} (H_{n+1})_{k,j}, \text{ ce qui s'écrit } H_{n+1} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n \rangle \end{pmatrix}$$

$$\text{et par suite } \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = H_{n+1}^{-1} \begin{pmatrix} \langle f, 1 \rangle \\ \vdots \\ \langle f, X^n \rangle \end{pmatrix}.$$

- **III-B.5** : On calcule $\langle f, 1 \rangle = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\text{Atan}(t)]_0^1 = \frac{\pi}{4}$, $\langle f, X \rangle = \int_0^1 \frac{t dt}{1+t^2} = [\frac{1}{2} \ln(1+t^2)]_0^1 = \frac{1}{2} \ln(2)$ et $\langle f, X^2 \rangle = \int_0^1 \frac{t^2 dt}{1+t^2} = \int_0^1 \frac{(1+t^2) - 1}{1+t^2} dt = 1 - \frac{\pi}{4}$, donc $\Pi_2 = [-\frac{75\pi}{2} - 90(-2 + \ln 2)]X^2 + 12[-15 + 3\pi + 8 \ln 2]X + 30 - \frac{21\pi}{4} - 18 \ln 2$.

IV Propriétés des coefficients de H_n^{-1}

— IV-A : Somme des coefficients de H_n^{-1}

— **IV-A.1** : $s_1 = 1, s_2 = 4, s_3 = 9$, on conjecture que $s_n = n^2$.

— **IV-A.2.a** Le système en question est un système de n équations à n inconnues dont la matrice est H_n qui est inversible, donc c'est un système de Cramer qui admet une solution unique.

— **IV-A.2.b** La solution unique du système est donnée par $\begin{pmatrix} a_0^{(n)} \\ \vdots \\ a_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} = H_n^{(-1)} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, donc $\forall i \in [[0, n-1]]$

$$a_i^{(n)} = \sum_{j=1}^n h_{i+1,j}^{(-1,n)}, \text{ ce qui donne en sommant sur les } i, \sum_{i=0}^{n-1} a_i^{(n)} = \sum_{i=1}^n a_{i-1}^{(n)} = \sum_{1 \leq i,j \leq n} h_{i,j}^{(-1,n)} = s_n.$$

— **IV-A.3** puisque $Q = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p X^p$, on aura $\langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p \langle S_n, X^p \rangle$, or en exploitant

pour tout $p \in [[0, n-1]]$, la $(p+1)$ ème ligne du système de la question IV - A.2 : (a), on obtient

$$\langle S_n, X^p \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(n)} \langle X^p, X^k \rangle = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k^{(n)}}{p+k+1} = 1, \text{ ce qui entraîne que } \langle S_n, Q \rangle = \sum_{p=0}^{n-1} \alpha_p = Q(1).$$

— **IV-A.4** En prenant $Q = S_n$ dans la relation précédente, on obtient $(S_n, S_n) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p^{(n)} = s_n$, puisque

$(K_p)_{0 \leq p \leq n-1}$ est une base orthonormale de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ on a $(S_n, S_n) = \|S_n\|^2 = \sum_{p=0}^{n-1} \langle S_n, K_p \rangle^2$, et tou-

jours d'après la relation précédente avec $Q = K_p$, on aura $\langle S_n, K_p \rangle = K_p(1)$, ce qui donne finalement

$$s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2.$$

— **IV-A.5** : On a $K_p = \sqrt{2p+1} L_p$ avec $L_p(1) = 1$ on obtient $K_p(1) = \sqrt{2p+1}$.

— **IV-A.6** : $s_n = \sum_{p=0}^{n-1} (K_p(1))^2 = \sum_{p=0}^{n-1} (2p+1) = 2 \sum_{p=1}^{n-1} p + n = (n-1)n + n = n^2$.

— **IV-B : Les coefficients de H_n^{-1} sont des entiers.**

— **IV-B.1** : Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, $\binom{2p}{p} = 2 \binom{2p-1}{p} \in 2\mathbb{N}$.

Soient $n \in \mathbb{N}^*, p \in [[1, n]]$:

$$\binom{n+p}{p} \binom{n}{p} = \frac{(n+p)!}{(p!)^2 (n-p)!} = \frac{(2p)!}{(p!)^2} \frac{(n+p)!}{(2p)!(n-p)!} = \binom{2p}{p} \binom{n+p}{2p} \in 2\mathbb{N}.$$

— **IV-B.2** : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $K_n = \sqrt{2n+1} L_n$ avec $L_n = \frac{1}{n!} (P_n^{(n)})$,

$$\text{or } (P_n)^{(n)} = (X^n (X-1)^n)^{(n)} = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} X^{n+k} \right)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} \frac{(n+k)!}{k!} X^k,$$

ce qui donne $L_n = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} \binom{n+k}{k} \binom{n}{k} X^k$, donc le coefficient constant de L_n est égale à

$(-1)^n$ et tous les autres sont pairs grâce à la question précédente.

— **IV-B.3** :

— $K_j = \sqrt{2j+1} \sum_{k=0}^j (-1)^{j-k} \binom{j+k}{k} \binom{j}{k} X^k$, donc en notant $P = (p_{i,j})$ la matrice de passage de la base canonique de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ vers (K_0, \dots, K_{n-1}) ,

pour tout $i, j \in [[1, n]]$ $p_{i,j} = \sqrt{2j-1}(-1)^{j-i} \binom{j+i-2}{i-1} \binom{j-1}{i-1}$ si $i \leq j$ et $p_{i,j} = 0$ si $i > j$.
 Or, d'après III.B.3, $H_n^{-1} = P^t P$, donc pour tout $i \in [[1, n]]$

$$h_{i,i}^{(-1,n)} = \sum_{j=i}^n p_{i,j}^2 = \sum_{j=i}^n (2j-1) \binom{j+i-2}{i-1}^2 \binom{j-1}{i-1}^2.$$

En particulier pour $i = 1$ et $i = n$, on obtient $h_{1,1}^{(-1,n)} = \sum_{j=1}^n (2j-1) = n^2$ et $h_{n,n}^{(-1,n)} = (2n-1) \binom{2n-2}{n-1}^2$.

— Pour tous $i, j \in [[1, n]]$ $h_{i,j}^{(-1,n)} = \sum_{k=\max(i,j)}^n p_{i,k} p_{j,k} =$
 $= (-1)^{i+j} \sum_{k=\max(i,j)}^n (2k-1) \binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1} \binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$

Ce qui montre que les $h_{i,j}^{(-1,n)}$ sont des entiers comme produit d'entiers.

— Soient $i, j \in [[2, n]]$, donc pour tout $k \geq \max(i, j) \geq 2$, $i-1, j-1, k-1 \in \mathbb{N}^*$, et par suite d'après (IV-B.1), $\binom{k+i-2}{i-1} \binom{k-1}{i-1}$ et $\binom{k+j-2}{j-1} \binom{k-1}{j-1}$ sont pairs, donc leur produit est un multiple de 4, ce qui entraîne que $h_{i,j}^{(-1,n)}$ qui est somme de ces produits est aussi un multiple de 4.
