Feuille d'exercices 26.
Calcul différentiel et familles sommables

Calcul différentiel

Exercice 26.1 : (niveau 1)
Pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $f(x, y) = (x^2 + xy)\sin\frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $f(x, y) = 0$ lorsque $x = 0$.

1°) Etudier la continuité de f.

2°) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

3°) Les applications $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont-elles continues en $(0,0)$?

Exercice 26.2 : (niveau 1)
Sur $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x^2 + y^2 \leq 1\}$, on pose $f(x, y) = \cos^2(x) + sh^2(y)$.

1°) Quels sont les points critiques de la restriction de f à l'intérieur de B ? Préciser la nature de ces points critiques.

2°) Calculer $\sup\limits_{(x,y)\in B} f(x, y)$.

Exercice 26.3 : (niveau 2)
Soit X_0 un élément de $\mathbb{R}^3$. Déterminer les applications $\Psi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, de classe C^1, telles que, pour tout $X \in \mathbb{R}^3$, $\overrightarrow{\text{grad}}(\Psi)(X) = \Psi(X)X_0$.

Exercice 26.4 : (niveau 2)
Notons $\begin{array}{rccc} f : & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \longmapsto & \sqrt{Tr(I_n + {}^tXX)} \end{array}$. Calculer les dérivées partielles de f. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.5 : (niveau 2)
Déterminer les points critiques de l'application $M \longmapsto det(M)$, de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice 26.6 : (niveau 3)

1°) On pose $f(u,v) = uv(1-u-v)$.
Justifier que f admet un maximum global sur $[0,1] \times [0,1]$.
Étudier les extremums de f sur $[0,1] \times [0,1]$.

2°) Dans le plan usuel, ABC désigne un triangle rectangle isocèle. Si M est un barycentre des points A, B, C à poids positifs, on note $g(M)$ le produit des distances de M aux 3 côtés du triangle. Déterminer les extremums de g.

Exercice 26.7 : (niveau 3)
Déterminer les extrema sur $\mathbb{R}_+^2 \setminus \{0\}$ de $(x,y) \longmapsto \dfrac{xy}{(x+1)(y+1)(x+y)}$.

Exercice 26.8 : (niveau 3)
Soient $n \in \mathbb{N}^*$, f une application de classe C^2 de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$ et u un automorphisme orthogonal de $\mathbb{R}^n$. On pose $\tilde{f} = f \circ u$. On rappelle que le laplacien de f est
$\Delta f = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}$. Montrer que $\Delta \tilde{f} = (\Delta f) \circ u$.

Familles sommables

Exercice 26.9 : (niveau 1)
Soit $(a,b) \in \mathbb{C}^2$ avec $a \neq b$. Calculer la somme de la famille double $\left(\dfrac{a^p b^q}{(p+q)!} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$.

Exercice 26.10 : (niveau 1)
Soit $(a,b) \in]1, +\infty[^2$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a^n + b^m} \right)_{(n,m) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

Exercice 26.11 : (niveau 2)
Pour tout couple $(m,n) \in \mathbb{N}^{*2}$, on pose

$$u_{m,n} = \frac{1}{n+1} \left(\frac{n}{n+1} \right)^m - \frac{1}{n+2} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^m .$$

1°) Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} u_{m,n}$ converge et calculer sa somme notée v_m, puis montrer que la série $\displaystyle\sum_{m \geq 1} v_m$ converge et calculer sa somme.

2°) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la série $\displaystyle\sum_{m \geq 1} u_{m,n}$ converge et calculer sa somme notée w_n, puis montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geq 1} w_n$ converge et calculer sa somme.

3°) Commenter les résultats précédents.

Exercice 26.12 : (niveau 2)

1°) A quelle condition sur α peut-on poser $R_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k^\alpha}$.

2°) Déterminer la nature de la série $\sum R_n$.

3°) En cas de convergence, montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} R_n = \sum_{q=1}^{+\infty} \frac{1}{q^{\alpha-1}}$.

Exercice 26.13 : (niveau 2)
Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la famille $\left(\dfrac{1}{p^\alpha + q^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ est-elle sommable ?

Exercice 26.14 : (niveau 3)
En admettant que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ et que $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$, calculez $\displaystyle\sum_{\substack{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2} \\ p\wedge q=1}} \frac{1}{p^2q^2}$.

Exercice 26.15 : (niveau 3)
Produit eulérien :
On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on désigne par p_n le $n$ième nombre premier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des entiers non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que les nombres premiers p_k avec $k \leq n$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m \in A_n \Longleftrightarrow [\forall p \in \mathbb{P},\ p|m \Longrightarrow p \in \{p_1, \ldots, p_n\}]$.
On fixe $s \in \mathbb{C}$ tel que $Re(s) > 1$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - p_k^{-s}} = \sum_{q\in A_n} q^{-s}$.

2°) En déduire que $\displaystyle\prod_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{1 - p^{-s}} = \sum_{q=1}^{+\infty} q^{-s}$.

Exercice 26.16 : (niveau 3) On note $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers et on désigne par p_n le $n$ième nombre premier.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note A_n l'ensemble des entiers non nuls dont la décomposition en facteurs premiers ne fait intervenir que les nombres premiers p_k avec $k \leq n$. Ainsi, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $m \in A_n \Longleftrightarrow [\forall p \in \mathbb{P},\ p|m \Longrightarrow p \in \{p_1, \ldots, p_n\}]$.

1°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} = \sum_{q\in A_n} \frac{1}{q}$.

2°) En déduire que $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1 - \frac{1}{p_k}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

3°) Montrer que $\displaystyle\sum_{k} \frac{1}{p_k}$ diverge.

Exercices supplémentaires

Calcul différentiel

Exercice 26.17 : (niveau 1)
Montrer que $f: \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & X^2 \end{array}$ est une application de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.18 : (niveau 2)
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\; f(x,y) = (y - x^2)(y - 2x^2)$.
Déterminez les points critiques de f.
Montrez que la restriction de f à toute droite passant par l'origine admet un minimum local en l'origine mais que f n'admet pas d'extremum local en l'origine.
Expliquer ce phénomène en étudiant $\{(x,y)/f(x,y) < 0\}$.

Exercice 26.19 : (niveau 2)
Soit f l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :
$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \;\; f(x,y) = (x+y)\sqrt{x^2+y^2}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ et $f(0,0) = 0$.
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 26.20 : (niveau 3)
Soit $(p,n) \in \mathbb{N}^{*2}$. Notons, pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $\varphi(M) = Tr(M^p)$.
Montrer que φ est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

Exercice 26.21 : (niveau 3)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^2. On définit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par les relations suivantes : Si $x \neq y$, $g(x,y) = \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y}$ et si $x = y$, $g(x,x) = f'(x)$.
Montrez que g est une application de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 26.22 : (niveau 3)
Soit U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une application convexe. On fixe $u \in U$ et on suppose que toutes les dérivées partielles de f existent en u.
Montrer que f est différentiable en u.

Familles sommables

Exercice 26.23 : (niveau 1)
On considère la famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}}$, définie par les relations suivantes : Pour tout $p\in\mathbb{N}$, $u_{p,p}=1$, $u_{2p,2p+1}=u_{2p+1,2p}=-1$, les autres éléments de la famille étant nuls.
Montrez que pour tout $m\in\mathbb{N}$ la série $\sum_n u_{m,n}$ est convergente et que la série $\sum_m \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$ est convergente.
La famille $(u_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}}$ est-elle sommable ?

Exercice 26.24 : (niveau 1)
Etudier la sommabilité des suites doubles $\left(\frac{1}{p^{\frac{3}{2}}q^{\frac{3}{2}}}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$ et $\left(\frac{1}{pq(p+q)}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^{*2}}$.

Exercice 26.25 : (niveau 2)
Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue.
Montrer que la famille $(f(q))_{q\in\mathbb{Q}}$ est sommable si et seulement si f est nulle.

Exercice 26.26 : (niveau 2)
On pose $S_n=\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p}$.

1°) Montrer qu'il existe $\gamma\in\mathbb{R}$ tel que $S_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$.

2°) Pour $(p,q)\in\mathbb{N}^2$, On pose $u_{p,q}=\frac{1}{p^2-q^2}$ si $p\neq q$ et $u_{p,p}=0$.
Justifier l'existence et calculer $\sum_{q=0}^{+\infty}\sum_{p=0}^{+\infty}u_{p,q}$.

3) Que dire de $\sum_{p=0}^{+\infty}\sum_{q=0}^{+\infty}u_{p,q}$?

Exercice 26.27 : (niveau 2)
Calculer $\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} 2^{-3q-p-(p+q)^2}$.

Exercice 26.28 : (niveau 2)
Soit $\alpha\in\mathbb{R}$.

1°) Déterminez la nature de la famille $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2\setminus\{0\}}$).

2°) Pour la suite de l'exercice, on fixe $n\in\mathbb{N}^*$.
Soit $r\in\mathbb{N}^*$. On note $S_r=\{(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{N}^n/p_1+\cdots+p_n=r\}$ et E_r l'ensemble des suites strictement croissantes de $\mathbb{N}_{n+r-1}$ contenant exactement $n-1$ éléments. On considère l'application suivante

$$\begin{array}{rrcl}\varphi : & E_r & \longrightarrow & S_r \\ & (a_1,\dots,a_{n-1}) & \longmapsto & (a_i-a_{i-1}-1)_{1\leq i\leq n}\end{array},$$

où pour toute suite $(a_1, \dots, a_{n-1}) \in E_r$ on convient que $a_0 = 0$ et $a_n = n + r$. Montrez que φ est bijective et en déduire le cardinal de S_r.

3°) Déterminez la nature de la famille $\left(\dfrac{1}{(p_1 + \cdots + p_n)^\alpha} \right)_{(p_1,\dots,p_n)\in\mathbb{N}^n\setminus\{0\}}$).

Exercice 26.29 : (niveau 2)
On note A l'ensemble des entiers naturels non nuls dont l'écriture décimale ne comporte aucun 9. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a}\right)_{a\in A}$ est sommable.

Exercice 26.30 : (niveau 3)
Soient (a_n) et (u_n) deux suites de complexes.

1°) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, montrer que $\sup\limits_{k\in\{E(\frac{n}{2}),\dots,n\}} |u_k| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, où $E(h)$ désigne la partie entière de h.

2°) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et si $\sum a_n$ est absolument convergente, montrer que le terme général du produit de Cauchy de $\sum a_n$ et de $\sum u_n$ tend vers 0.

3°) Si $\sum u_n$ converge et si $\sum a_n$ est absolument convergente, montrer que $\delta_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$,
où $\delta_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n} a_p \sum_{q=0}^{n} u_q - \sum_{k=0}^{n}\sum_{q=0}^{k} a_q u_{k-q}$.
Qu'a-t-on démontré ?

Exercice 26.31 : (niveau 3)
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de complexes telle que $\displaystyle\sum_{n\geq 1} a_n^2$ est absolument convergente.

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} x\Big(\sum_{k=1}^{n}(-1)^k|a_k|e^{ikx}\Big)^2 dx = \frac{2\pi}{i} \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq p\leq n}} \frac{|a_k||a_p|}{k+p}.$$

2°) Montrer que la famille $\left(\dfrac{a_p a_q}{p+q}\right)_{p,q\in\mathbb{N}^*}$ est sommable.

Exercice 26.32 : (niveau 3)
Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $d_n = |A \cap \{1, \dots, n\}|$.
Si $d_n \sim \dfrac{n}{\ln n}$, montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{a}\right)_{a\in A}$ n'est pas sommable.

Exercice 26.33 : (niveau 3)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on pose $f(x) = \displaystyle\sum_{\substack{p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}^*\\ p\wedge q=1,\, \frac{p}{q}<x}} \frac{1}{2^{|p|+q}}$.

Montrer que f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est croissante et déterminer l'ensemble de ses points de discontinuité.