

Corrigé du DM 42

CCP 1998, maths 2 : Corrigé

PARTIE I - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A GAUCHE

On suppose dans cette partie que $m > n$ et que $\text{rg } A = n$.

1. Propriété d'inversibilité et de transposition

- a) L'existence de solution pour l'équation $Ax = b$ résulte de l'hypothèse $b \in \text{Im } A$ et l'unicité du fait que A est injective puisque $\dim(\text{Ker } A) = \dim E - \text{rg } A = n - n = 0$.
- b) La matrice $B = {}^tAA$ est identifiée à un endomorphisme de l'espace vectoriel euclidien $E = \mathbf{R}^n$ dans lequel la base canonique est orthonormale. Ainsi, vérifier que l'endomorphisme canoniquement associé à B est symétrique revient à vérifier que la matrice B est symétrique, ce qui est immédiat puisque ${}^tB = {}^t({}^tAA) = {}^tAA = B$.
Pour montrer que B est inversible, il suffit de montrer que B est injective, c'est à dire que $\text{Ker } B = \{0_E\}$. En effet, soit $x \in \text{Ker } B$: on a $Bx = 0$, d'où ${}^tx({}^tAA)x = 0$, donc $\|Ax\|^2 = {}^t(Ax)(Ax) = 0$, d'où $Ax = 0_F$ et finalement $x = 0_E$ puisque A est injective.

- c) **Important** : le résultat de cette question est valable aussi bien pour $m > n$ que pour $m \leq n$.

$$\begin{aligned} \text{Soit } y \in F. \quad y \in \text{Ker } {}^tM &\iff {}^tMy = 0_E \iff \forall x \in E, {}^tx({}^tMy) = 0 \iff \forall x \in E, {}^t(Mx)y = 0 \\ &\iff \forall z \in \text{Im } M, (z|y)_F = {}^tz y = 0 \iff y \in (\text{Im } M)^\perp. \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } \boxed{\text{Ker } {}^tM = (\text{Im } M)^\perp.}$$

En remplaçant M par tM (et en échangeant m et n), on obtient $\text{Ker } M = (\text{Im } {}^tM)^\perp$, donc

$$\boxed{(\text{Ker } M)^\perp = \text{Im } {}^tM.}$$

2. Détermination d'une inverse à gauche de A

- a) Lorsque $y \in F$, le vecteur $b = Py \in \text{Im } A$: d'après 1.a, il existe un unique $x \in E$ tel que $Ax = b = Py$. On définit donc ainsi une application $A^{(g)} : y \mapsto x$ de F vers E .
Vérifions que $\forall (y, y') \in F^2, \forall \lambda \in \mathbf{R}, A^{(g)}(\lambda y + y') = \lambda A^{(g)}y + A^{(g)}y'$. En effet, en notant $x = A^{(g)}y$ et $x' = A^{(g)}y'$, on a par définition : $Py = Ax$ et $Py' = Ax'$, donc $P(\lambda y + y') = \lambda Py + Py' = \lambda Ax + Ax' = A(\lambda x + x')$. Ainsi, par définition de $A^{(g)} : A^{(g)}(\lambda y + y') = \lambda x + x'$, donc $A^{(g)}(\lambda y + y') = \lambda A^{(g)}y + A^{(g)}y'$.
- b) Vérifions par double implication que $Ax = Py \iff {}^tAAx = {}^tAy$.
- Si $Ax = Py$, sachant que $y - Py \in (\text{Im } A)^\perp$, alors $y - Ax \in \text{Ker } {}^tA$, donc ${}^tA(y - Ax) = 0_E$, d'où ${}^tAAx = {}^tAy$.

- Si ${}^tAAx = {}^tAy$, alors ${}^tA(y - Ax) = 0_E$, donc $z = y - Ax \in \text{Ker } {}^tA = (\text{Im } A)^\perp$.
Ainsi l'égalité $y = Ax + z$ est une décomposition de y sur $\text{Im } A \oplus (\text{Im } A)^\perp$ qui montre que $Py = Ax$.
Donc $\forall y \in F, \forall x \in E, x = A^{(g)}y \iff {}^tAAx = {}^tAy \iff x = ({}^tAA)^{-1}{}^tAy$, donc
 $A^{(g)} = ({}^tAA)^{-1}{}^tA$.

c) $\forall y \in F, Py = AA^{(g)}y$, donc $P = AA^{(g)} = A({}^tAA)^{-1}{}^tA$.

Remarque : $\text{Ker } A^{(g)} = (\text{Im } A)^\perp$

En effet $y \in \text{Ker } A^{(g)} \iff A^{(g)}y = 0 \iff AA^{(g)}y = 0 \iff Py = 0 \iff y \in \text{Ker } P = (\text{Im } A)^\perp$.

3. Propriétés de $A^{(g)}$. Unicité

a) On a $A^{(g)}A = ({}^tAA)^{-1}{}^tAA = I_n$.

En particulier $A^{(g)}A$ est surjective, donc $A^{(g)} : F \rightarrow E$ est nécessairement surjective, donc
 $\text{rg } A^{(g)} = \dim E = n$.

On a aussi $\text{rg } A^{(g)} = \dim F - \dim(\text{Ker } A^{(g)}) = \dim F - \dim(\text{Im } A)^\perp = \dim(\text{Im } A) = n$.

b) Si $m = n$, c'est à dire $\dim E = \dim F$, puisque A est injective par hypothèse, alors elle est bijective dans ce cas. En composant à droite l'égalité $A^{(g)}A = I_n$ par A^{-1} , on obtient que $A^{(g)} = A^{-1}$.

c) On suppose que $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ vérifie $BA = I_n$ et que AB est un projecteur orthogonal.

En particulier BA est surjective, donc B est surjective :

ainsi $\text{Im}(AB) = (AB)(E) = A(B(E)) = A(E) = \text{Im } A$.

Donc AB est le projecteur orthogonal sur $\text{Im } A$.

Donc $\forall z \in (\text{Im } A)^\perp, ABz = 0$ et comme A est injective, on a bien : $\forall z \in (\text{Im } A)^\perp, Bz = 0$.

Soit $y \in F$. Il se décompose en $y = v + z$ avec $v \in \text{Im } A$ et $z \in (\text{Im } A)^\perp$.

Alors $By = Bv + Bz = Bv = BP y = BA x = x = A^{(g)}y$, donc $B = A^{(g)}$.

Bilan :

Lorsque A est injective, parmi toutes les inverses à gauche $B \in \mathcal{M}_{n,m}$ de A (ie $BA = I_n$), il en existe une et une seule de sorte que AB soit un projecteur orthogonal : il s'agit de $A^{(g)}$.

4. Exemples

a) Comme $\text{rg } A = n$, les a_i sont non nuls. On les suppose orthogonaux.

Alors le coefficient d'indice (i, k) de la matrice-produit tAA est égal à $\sum_{j=1}^n a_{ji} a_{jk} = (a_i | a_k) = \delta_{ik} \|a_i\|^2$.

tAA est donc égale à la matrice diagonale $\text{Diag}(\|a_1\|^2, \dots, \|a_n\|^2)$.

$$\text{Ainsi } A^{(g)} = ({}^tAA)^{-1}{}^tA = \text{Diag}\left(\frac{1}{\|a_1\|^2}, \dots, \frac{1}{\|a_n\|^2}\right) \begin{pmatrix} {}^t a_1 \\ \vdots \\ {}^t a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{{}^t a_1}{\|a_1\|^2} \\ \vdots \\ \frac{{}^t a_n}{\|a_n\|^2} \end{pmatrix}$$

$A^{(g)} = {}^tA \iff \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \|a_i\|^2 = 1 \iff$ les vecteurs-colonnes de A sont orthonormés dans F .

- b) Pour b vecteur non nul de $F = \mathbf{R}^m$, on note abusivement b l'application linéaire $s \mapsto sb$ de \mathbf{R} vers F qui est représentée par la matrice unicolonne (b) identifiée à b .

En appliquant ce qui précède avec ici $n = 1$, on obtient que $b^{(g)} = \frac{{}^tb}{\|b\|^2}$.

Ainsi la forme linéaire $b^{(g)}$ est caractérisée par : $\forall y \in F, b^{(g)}y = \frac{{}^tb y}{\|b\|^2} = \frac{(b|y)_F}{(b|b)_F}$.

5. Description d'une méthode de détermination de $A^{(g)}$

- a) On a $F_1 = F_0 + \mathbf{R}d$ avec $d \notin F_0$, donc $d' \neq d$. Ainsi $d = \delta - d' = \delta - P_0(\delta) = p_{F_0^\perp}(\delta) \in F_0^\perp$, donc d est un vecteur non nul de F_1 orthogonal à F_0 , d'où $F_1 = F_0 \oplus \mathbf{R}d$. Donc $F = F_1 \oplus F_1^\perp = F_0 \oplus \mathbf{R}d \oplus F_1^\perp$, ce qui montre que $F_0^\perp = \mathbf{R}d \oplus F_1^\perp$.

Tout vecteur y de F se décompose de façon unique sous la forme $y = y_0 + \alpha_y d + y_1'$ avec $y_0 \in F_0, \alpha_y \in \mathbf{R}, y_1' \in F_1^\perp$.

Puisque $\alpha_y d$ représente la projection orthogonale de y sur la droite $\mathbf{R}d$, on sait que $\alpha_y d = \frac{(d|y)_F}{\|d\|^2} d$.

Puisque $P_0 y = y_0$ et $P_1 y = y_0 + \alpha_y d$, alors $P_1 y = P_0 y + \frac{1}{\|d\|^2} (d|y)_F d$.

On remarque que $\alpha_y d = \frac{1}{\|d\|^2} ({}^tdy) \cdot d = \frac{1}{\|d\|^2} d {}^tdy = d d^{(g)} y$. Donc $P_1 y = P_0 y + d d^{(g)} y$ et

$$P_1 = P_0 + d d^{(g)}.$$

- b) Pour $k = 1 \dots n$, notons $F_k = \text{Im } A_k$ le sous-espace vectoriel de F engendré par la famille (libre) (a_1, \dots, a_k) et par P_k la projection orthogonale dans F sur F_k .

Comme $a_k \notin F_{k-1}$ pour $2 \leq k \leq n$, en considérant $d_k = a_k - P_{k-1} a_k$ et en appliquant le résultat du 5.a, on a :

$P_k = P_{k-1} + d_k d_k^{(g)}$. Or d'après 2.c, $P_k = A_k A_k^{(g)}$, d'où l'égalité $(1) \quad A_k A_k^{(g)} = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k d_k^{(g)}$.
Il y a donc une erreur dans l'énoncé.

En outre, $d_k = a_k - P_{F_{k-1}}(a_k)$, donc $d_k = (I_m - A_{k-1} A_{k-1}^{(g)}) a_k$.

- c) Le produit matriciel $A_k^{(g)} A_k = I_k$ effectué par blocs donne les égalités suivantes :

$$C_k A_{k-1} = I_{k-1}, \quad C_k a_k = 0, \quad {}^t\gamma_k A_{k-1} = 0, \quad {}^t\gamma_k a_k = 1.$$

Vérifions d'abord l'affirmation de l'énoncé selon laquelle $\gamma_k \in \text{Im } A_k = F_k$.

En effet $A_k^{(g)} = ({}^t A_k A_k)^{-1} {}^t A_k$, donc $({}^t C_k, \gamma_k) = {}^t A_k^{(g)} = A_k B_k$ avec $B_k = ({}^t A_k A_k)^{-1}$ symétrique d'ordre n .

En écrivant B_k sous la forme (B'_{k-1}, x_k) avec $x_k \in \mathbf{R}^k$, on obtient $\gamma_k = A_k x_k \in \text{Im } A_k = F_k$.

Puisque ${}^t\gamma_k A_{k-1} = 0$, en transposant, on trouve que ${}^tA_{k-1} \gamma_k = 0$, donc $\gamma_k \in \text{Ker } {}^tA_{k-1} = (\text{Im } A_{k-1})^\perp = F_{k-1}^\perp$.

D'autre part $d_k \in F_k$ et $d_k \in F_{k-1}^\perp$.

Ainsi γ_k et d_k sont tous deux dans $F_k \cap F_{k-1}^\perp$. Mais $F_k \cap F_{k-1}^\perp$ est l'orthogonal de F_{k-1} pour la restriction du produit scalaire à F_k , donc $\dim(F_k \cap F_{k-1}^\perp) = \dim(F_k) - \dim(F_{k-1}) = 1$. On en déduit que γ_k et d_k sont colinéaires : $\exists \mu_k \in \mathbf{R} / \gamma_k = \mu_k d_k$.

Or $1 = {}^t\gamma_k a_k = {}^t\gamma_k (d_k + d'_k) = {}^t\gamma_k d_k$ car $(d_k | d'_k) = 0$, donc ${}^t\gamma_k d'_k = (\gamma_k | d'_k) = 0$.

On trouve donc que $1 = \mu_k {}^t d_k d_k = \mu_k \|d_k\|^2$, d'où $\boxed{\gamma_k = \frac{d_k}{\|d_k\|^2}}$ et aussi ${}^t\gamma_k = d_k^{(g)}$.

d) L'égalité (1) donne : $A_{k-1} C_k + a_k {}^t\gamma_k = A_{k-1} A_{k-1}^{(g)} + d_k d_k^{(g)}$.

En composant à gauche par $A_{k-1}^{(g)}$ et sachant que $A_{k-1}^{(g)} A_{k-1} = I_m$ et que $A_{k-1}^{(g)} d_k = 0$ puisque $d_k \in (\text{Im } A_{k-1})^\perp = \text{Ker } A_{k-1}^{(g)}$ d'après la remarque du **2.c**, on obtient :

$$C_k = A_{k-1}^{(g)} [I_m + d_k d_k^{(g)} - a_k {}^t\gamma_k] = A_{k-1}^{(g)} [I_m - a_k d_k^{(g)}].$$

En conclusion, les formules de récurrence ci-dessus permettent de déduire la matrice $A_k^{(g)} \in \mathcal{M}_{m,k}$ à partir de $A_{k-1}^{(g)}$

L'initialisation de l'algorithme de calcul de $A^{(g)} = A_n^{(g)}$ est immédiate puisque $A_1 = a_1$, donc $A_1^{(g)} = \frac{{}^t a_1}{\|a_1\|^2}$.

PARTIE II - CONSTRUCTION D'UNE MATRICE INVERSE A DROITE

On suppose ici que $m < n$ et que $\text{rg } A = m = \dim F$, c'est à dire que A est surjective.

1. Détermination d'une inverse à droite

a) Soit $y \in F$ et x un antécédent de y par A . x se décompose en $x = x_1 + \bar{x}$ avec $x_1 \in \text{Ker } A$ et $\bar{x} \in (\text{Ker } A)^\perp$. On a alors $y = Ax = A\bar{x}$, ce qui prouve l'existence d'un antécédent de y dans $(\text{Ker } A)^\perp$. Supposons que $y = Ax'$ avec $x' \in (\text{Ker } A)^\perp$. Alors $A(\bar{x} - x') = 0_F$, donc $\bar{x} - x' \in \text{Ker } A \cap (\text{Ker } A)^\perp$, d'où $x' = \bar{x}$, ce qui prouve l'unicité d'antécédent de y dans $(\text{Ker } A)^\perp$.

De plus si $y = Az$, en décomposant z en $z' + z''$ avec $z' \in \text{Ker } A$ et $z'' \in (\text{Ker } A)^\perp$, alors $y = Az = Az''$, d'où par unicité $z'' = \bar{x}$ et $\|z\|^2 = \|z'\|^2 + \|\bar{x}\|^2 \geq \|\bar{x}\|^2$, donc $\|\bar{x}\| \leq \|z\|$, donc \bar{x} est un antécédent de y de norme minimum.

Si l'on suppose que $y = Az$ et $\|z\| = \|\bar{x}\|$, alors $\|z'\|^2 = 0$, donc $z' = 0$, c'est à dire $z = \bar{x}$, ce qui prouve l'unicité d'antécédent de y dans E de norme minimum.

b) Vérifions que l'application $A^{(d)}$ de F vers E est linéaire.

En notant $\bar{x} = A^{(d)}y$ et $\bar{x}' = A^{(d)}y'$, alors $A(\lambda\bar{x} + \bar{x}') = \lambda A\bar{x} + A\bar{x}' = \lambda y + y'$.

Comme $\lambda\bar{x} + \bar{x}' \in (\text{Ker } A)^\perp$, on a par définition de $A^{(d)}$, $\lambda\bar{x} + \bar{x}' = A^{(d)}(\lambda y + y')$. Ainsi $\underline{A^{(d)}(\lambda y + y') = \lambda A^{(d)}y + A^{(d)}y'}$.

$\forall y \in F, A^{(d)}y = \bar{x}$ et $A\bar{x} = y$, donc $AA^{(d)}y = y$, c'est à dire $AA^{(d)} = I_m$.

2. Propriétés de $A^{(d)}$

a) Comme $AA^{(d)}$ est injective, nécessairement $A^{(d)}$ est injective et donc $\text{rg } A^{(d)} = m$.

b) Notons $Q = A^{(d)}A$. Alors $Q^2 = A^{(d)}AA^{(d)}A = A^{(d)}I_mA = A^{(d)}A = Q$, ce qui prouve que Q est un projecteur de E .

$x \in \text{Ker } Q \iff A^{(d)}Ax = 0_E \iff Ax = 0_F \iff x \in \text{Ker } A$ puisque $A^{(d)}$ est injective, donc $\text{Ker } Q = \text{Ker } A$.

Or $\text{Im } Q = \text{Im } (A^{(d)}A) \subset \text{Im } A^{(d)} \subset (\text{Ker } A)^\perp = (\text{Ker } Q)^\perp$, ce qui suffit, avec la formule du rang, pour affirmer que $\text{Im } Q = (\text{Ker } Q)^\perp$ et :

Q est le projecteur orthogonal sur $(\text{Ker } A)^\perp$.

c) Lorsque $m = n$, on conclut de même qu'au **I.3.b** que $A^{(d)} = A^{-1}$.

d) L'égalité $AA^{(d)} = I_m$ donne immédiatement en transposant : ${}^t(A^{(d)}){}^tA = I_m$.

D'autre part, puisque $Q = A^{(d)}A$ est un projecteur orthogonal, on sait qu'il est symétrique, donc ${}^tQ = Q$. Or ${}^tQ = {}^tA{}^t(A^{(d)})$.

En considérant $A' = {}^tA$ dont le rang est aussi égal à m et $B' = {}^t(A^{(d)})$, on est dans les conditions d'application du résultat d'unicité obtenu au **I.3.c** (en inversant les rôles de E et F) puisque A' est injective, $B'A' = I_m$ et que $A'B'$ est un projecteur orthogonal.

On en déduit que ${}^t(A^{(d)}) = B' = A'^{(g)} = ({}^tA'A')^{-1}{}^tA' = (A{}^tA)^{-1}A$.

En transposant, sachant que ${}^t(M^{-1}) = ({}^tM)^{-1}$, on obtient que $A^{(d)} = {}^tA(A{}^tA)^{-1}$.

PARTIE III - GÉNÉRALISATION

1. Pseudo inverse d'une matrice rectangulaire

a) D'après le théorème fondamental d'isomorphisme, on sait que V induit un isomorphisme R de tout supplémentaire de $\text{Ker } V$ sur $\text{Im } V$, ce qui s'applique en particulier à $(\text{Ker } V)^\perp$.

Ainsi R^{-1} est un isomorphisme de $\text{Im } V$ sur $(\text{Ker } V)^\perp$.

b) On rappelle qu'une application linéaire est entièrement déterminée par ses restrictions à deux sous-espaces supplémentaires.

Considérons l'application W de F vers E déterminée par :
$$\begin{cases} \forall y \in \text{Im } V, Wy = R^{-1}y \\ \forall z \in (\text{Im } V)^\perp, Wz = 0_F \end{cases}$$

Il est clair que W est linéaire.

Vérifions que W satisfait aux quatre conditions de l'énoncé.

- $\text{Ker } W = (\text{Im } V)^\perp$.

On a déjà $(\text{Im } V)^\perp \subset \text{Ker } W$.

Réciproquement, soit $x \in \text{Ker } W$. x se décompose en $y + z$ avec $y \in \text{Im } V$ et $z \in (\text{Im } V)^\perp$.

Alors $0 = Wx = Wy + Wz = Wy = R^{-1}y$, d'où $y = 0$ et donc $x = z \in (\text{Im } V)^\perp$.

- $\underline{\text{Im } W = (\text{Ker } V)^\perp}$.

On a déjà $\text{Im } W \subset \text{Im } R^{-1} = (\text{Ker } V)^\perp$.

De plus $\dim(\text{Im } W) = \dim F - \dim(\text{Ker } W) = \dim F - \dim(\text{Im } V)^\perp = \dim(\text{Im } V)$,

donc $\dim(\text{Im } W) = n - \dim(\text{Ker } V) = \dim(\text{Ker } V)^\perp$.

- $\underline{WV = Q}$.

Soit $x \in E$: il se décompose en $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in \text{Ker } V$ et $x_2 \in (\text{Ker } V)^\perp$. Alors $WVx = WVx_2 = R^{-1}Vx_2$ car $Vx_2 \in \text{Im } V$. Comme $x_2 \in (\text{Ker } V)^\perp$, $Vx_2 = Rx_2$ et ainsi $WVx = R^{-1}Rx_2 = x_2 = Qx$.

- $\underline{VW = P}$.

Soit $y \in F$: il se décompose en $y = y_1 + y_2$ avec $y_1 \in \text{Im } V$ et $y_2 \in (\text{Im } V)^\perp$.

Alors $Wy = Wy_1 + Wy_2 = R^{-1}y_1$ par définition de W .

Ainsi $VWy = VR^{-1}y_1 = RR^{-1}y_1$ car $R^{-1}y_1 \in (\text{Ker } V)^\perp$. Donc $VWy = RR^{-1}y_1 = y_1 = Py$.

- c) En outre $\forall y \in F$, $WVWy = QWy = Wy$ car $Wy \in \text{Im } W = (\text{Ker } V)^\perp = \text{Im } Q$, donc Wy est invariant par le projecteur Q . Ceci montre que $\underline{WVW = W}$.

Soit W' une application linéaire de F vers E vérifiant : $W'V = Q$, $VW' = P$, $W'VW' = W'$.

Montrons que $W' = W$ en considérant leurs restrictions à $\text{Im } V$ et $(\text{Im } V)^\perp$.

- ★ Soit $y \in \text{Im } V$. Considérons $x = R^{-1}y$: on a $y = Vx$ et $x \in (\text{Ker } V)^\perp = \text{Im } Q$, donc $Qx = x$.

Ainsi $W'y = W'Vx = Qx = x = R^{-1}y = Wy$.

- ★ Soit $z \in (\text{Im } V)^\perp$. Alors $z \in \text{Ker } P$ et $W'z = W'VW'z = W'Pz = W'0 = 0 = Wz$.

d) Cas particuliers

- Si $r = n$, alors V est injective, donc $\text{Ker } V = \{0_E\}$ et $\underline{Q = I_n}$. Ainsi $WV = I_n$ et $VW = P$ est un projecteur orthogonal, donc d'après l'unicité obtenue au **I.3.c**, nécessairement $W = V^{(g)}$.

- Si $r = m$, alors V est surjective, donc $P = I_m$.

En transposant les égalités $VW = I_m$ et $WV = Q$ pour se ramener à l'unicité de l'inverse à gauche vérifiant la condition de **I.3.c**, on montrerait de même qu'au **II.2.d** que W est nécessairement égal à $V^{(d)}$.

2. Propriétés

D'après **III.1.b**, V^+ vérifie les deux propriétés suivantes : $\text{Ker } V^+ = (\text{Im } V)^\perp$ et $\text{Im } V^+ = (\text{Ker } V)^\perp$.

- Pour montrer que $\underline{(V^+)^+ = V}$, il suffit de vérifier les trois propriétés caractéristiques suivantes :

- $V(V^+)$ est la projection orthogonale sur $(\text{Ker } V^+)^\perp$ dans F
- $(V^+)V$ est la projection orthogonale sur $(\text{Im } V^+)$ dans E
- $V(V^+)V = V$

i) résulte du fait que $V(V^+)$ est la projection orthogonale sur $\text{Im } V$ et que $\text{Im } V = (\text{Ker } V^+)^\perp$.

ii) résulte du fait que $(V^+)V$ est la projection orthogonale sur $(\text{Ker } V)^\perp$ et que $(\text{Ker } V)^\perp = \text{Im } V^+$.

iii) est vérifiée car $\forall x \in E$, $V(V^+)Vx = PVx = Vx$ car $Vx \in \text{Im } V = \text{Im } P$.

- On rappelle que les projecteurs orthogonaux P et Q sont symétriques.

On a :

- i) ${}^t(V^+){}^tV = {}^t(VV^+) = {}^tP = P$ projection orthogonale sur $\text{Im } V = (\text{Ker } {}^tV)^\perp$.
- ii) ${}^tV{}^t(V^+) = {}^t(V^+V) = {}^tQ = Q$ projection orthogonale sur $(\text{Ker } V)^\perp = \text{Im } {}^tV$.
- iii) ${}^t(V^+){}^tV{}^t(V^+) = {}^t(V^+)$ en transposant l'égalité $V^+VV^+ = V^+$.

Ces trois conditions permettent de conclure, grâce à l'unicité obtenue au **c**) que $\underline{{}^tV}^+ \equiv {}^t(V^+)$.

PARTIE IV - APPLICATION NUMÉRIQUE

1. Posons $y_i = f(t_i)$ pour $i = 1 \dots m$ et considérons le polynôme (d'interpolation de Lagrange) L de degré inférieur ou égal à $m - 1$ déterminé par les conditions : $\forall i \in \llbracket 1; m \rrbracket, L(t_i) = y_i$.

Si l'on pose $L = \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k X^k, \sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k t_i^k \right)^2 = 0 \leq \varepsilon$, donc l'ensemble

$\{n \in \mathbf{N} / \exists (x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1}, \sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^n x_k t_i^k \right)^2 \leq \varepsilon\}$ est une partie non vide de \mathbf{N} contenant $m - 1$. Elle admet donc un plus petit élément p qui vérifie donc $p \leq m - 1$. Ainsi le problème posé a une solution.

2. Il est facile de vérifier que l'application $(P, Q) \mapsto \langle P, Q \rangle = \sum_{i=1}^m P(t_i) Q(t_i)$ est un produit scalaire sur $\mathbf{R}_{m-1}[X]$.

La quantité $\sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^p x_k t_i^k \right)^2$ s'interprète alors comme étant $\|L - P\|^2$ avec $P = \sum_{k=0}^p x_k X^k$.

A p fixé, on sait que cette quantité admet un minimum lorsque P est la **projection orthogonale de L sur le sous espace vectoriel $\mathbf{R}_p[X]$** .

Pour obtenir ce polynôme P de degré $\leq p$ réalisant ce minimum, cherchons les points critiques de la fonction $F : (x_0, x_1, \dots, x_p) \mapsto F(x_0, \dots, x_p) = \sum_{i=1}^m \left(y_i - x_0 - x_1 t_i - \dots - x_k t_i^k - \dots - x_p t_i^p \right)^2$.

Or $\frac{\partial F}{\partial x_k}(x_0, \dots, x_p) = -2 \sum_{i=1}^m t_i^k [y_i - x_0 - x_1 t_i - \dots - x_j t_i^j - \dots - x_p t_i^p]$.

Les points critiques sont solutions du système (S_p) des $(p + 1)$ équations aux $(p + 1)$ inconnues x_0, \dots, x_p suivant :

Pour $k = 0, 1, \dots, p, x_0 \sum_{i=1}^m t_i^k + \dots + x_j \sum_{i=1}^m t_i^{k+j} + \dots + x_p \sum_{i=1}^m t_i^{k+p} = \sum_{i=1}^m t_i^k y_i$ noté β_k .

Considérons la matrice carrée d'ordre m (de Vandermonde) $A = \begin{pmatrix} 1 & t_1 & \dots & t_1^{m-1} \\ 1 & t_2 & \dots & t_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & t_m & \dots & t_m^{m-1} \end{pmatrix}$.

Comme les t_i sont deux à deux distincts, elle est de rang m .

Notons A_p la matrice de type $(m, p + 1)$ constituée des $p + 1$ premières colonnes de A .

Avec ces notations, on remarque (!!!) qu'en notant b_p le vecteur de \mathbf{R}^{p+1} de composantes β_0, \dots, β_p et y le vecteur de \mathbf{R}^m de composantes (y_1, \dots, y_m) , alors $b_p = {}^t A_p y$ et que le coefficient d'indice (k, j) ($0 \leq k \leq p$, $0 \leq j \leq p$) du système (S_p) est égal au coefficient de même indice du produit matriciel ${}^t A_p A_p$.

Ainsi le système (S_p) est de la forme ${}^t A_p A_p X_p = {}^t A_p y$.

Comme $\text{rg } A_p = p + 1$, la matrice ${}^t A_p A_p$ est inversible d'après le **I.1.b**, donc (S_p) a une solution unique : le seul point critique de F est donc le point en lequel F présente un minimum.

En notant P_p la projection orthogonale sur $\text{Im } A_p$, on a vu au **I.2.b** que (S_p) est équivalent à $A_p X_p = P_p y$, donc à :

$$X_p = A_p^{(g)} y.$$

L'algorithme demandé utilise celui du calcul de proche en proche des $A_p^{(g)}$ obtenu à la fin de la partie I.

Initialisation : $p = 0$, $A_0^{(g)} = \frac{{}^t A_0}{\|A_0\|^2} = \frac{1}{m} (1, \dots, 1)$ et $X_0 = (x_0)$ avec $x_0 = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m y_i$.

Boucle : **Tant que** $\sum_{i=1}^m \left(y_i - \sum_{k=0}^p x_k t_i^k \right)^2 > \varepsilon$ **faire** :

Début :

$p \leftarrow p + 1$.

Déduire $A_p^{(g)}$ de $A_{p-1}^{(g)}$ en utilisant les formules de récurrence du **I.5**.

Calculer x_0, \dots, x_p sachant que $X_p = A_p^{(g)} y$.

Fin

Retourner p et (x_0, \dots, x_p) .

Fin du corrigé