MPSI 2

Programme virtuel des colles de mathématiques.

Semaine (virtuelle) 30 : du lundi 17 juin au vendredi 22 juin

Calcul différentiel et familles sommables

Liste des questions de cours

1°) Donner la définition de la différentielle et montrer son unicité.

2°) Lorsque f est différentiable, exprimer en justifiant la différentielle de f en fonction de ses dérivées partielles.

3°) Montrer qu'une application bilinéaire est de classe C^1 et calculer sa différentielle.

4°) Enoncer et démontrer le théorème de composition d'applications différentiables.

5°) Calculer $\dfrac{\partial}{\partial t}\Big(f(t^3u^4, \sqrt{t^2+1+u^2})\Big)$.

6°) Montrer que la surface d'équation $z = f(x, y)$, avec f de classe C^1, admet en tout point un plan tangent dont on précisera une équation.

7°) Montrer, en précisant cet énoncé, que le gradient de f est orthogonal à ses surfaces de niveau.

8°) Sommabilité de $\Big(\dfrac{1}{(p+q+1)^\alpha}\Big)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

9°) Soit $(u_i)_{i\in I} \in \mathbb{C}^I$ une famille au plus dénombrable de complexes que l'on suppose sommable. Soit $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante de parties finies de I dont la réunion est égale à I.
Montrer que $\sum\limits_{i\in I} u_i = \lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{j\in J_n} u_j$.

10°) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Calculer la somme de la suite double $\left(\dfrac{\cos(p+q)\theta}{p!q!}\right)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$.

11°) Soient $(u_i)_{i\in I}$ une famille sommable de complexes et φ une bijection de K dans I.
Montrer que $(u_{\varphi(k)})_{k\in K}$ est sommable avec $\sum\limits_{k\in K} u_{\varphi(k)} = \sum\limits_{i\in I} u_i$.

12°) Lorsque $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes montrer que $(a_pb_q)_{(p,q)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

13°) Enoncer puis démontrer un théorème relatif au produit de Cauchy de deux séries de complexes.

Calcul différentiel

1 Dérivées partielles

Dérivée partielle selon un vecteur, linéarité, dérivées partielles d'un produit.
Mauvais comportement de la notion de dérivée partielle vis à vis de la composition.

2 Différentielle

Différentiabilité, lien avec la dérivabilité.
Expression de la différentielle à l'aide des dérivées partielles.
Matrice jacobienne.

3 Cas des applications numériques

3.1 Le gradient

Définition lorsque E est euclidien.
L'opposé du gradient donne la direction de plus grande pente.

3.2 Recherche des extrema

Points critiques.
Si f est différentiable, les extrema de f sont des points critiques.

4 Applications continûment différentiables

f est une application de classe C^1 sur U si et seulement si df est définie et continue sur U.
f est de classe C^1 sur U si et seulement si ses dérivées partielles sont définies et continues sur U (admis).

Les applications linéaires et bilinéaires sont de classe C^1, calcul de leurs différentielles.

5 Composition

Une composée d'applications différentiables (resp : de classe C^1) est différentiable (resp : C^1).
différentielle d'une composée, règle de la chaîne, expression à l'aide du gradient.

Si U est convexe, f est constante si et seulement si f est de classe C^1 et $d(f) = 0$.

6 Un peu de géométrie différentielle

6.1 Vecteurs tangents

Définition d'un vecteur tangent en un point à une partie.

6.2 Plan tangent à une surface

Nappe paramétrée différentiable d'un ouvert de $\mathbb{R}^2$ dans un espace euclidien de dimension 3.
Plan tangent et normale en un point d'une nappe paramétrée.

Cas d'une surface d'équation $z = f(x, y)$.

6.3 Surfaces de niveau

Le gradient de f est orthogonal aux surfaces de niveau de f.

Familles sommables

7 Familles sommables de réels positifs

Si $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{R}_+^I$, on pose $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = \sup_{\substack{J \in \mathcal{P}(I) \\ J \text{ finie}}} \sum_{i \in J} u_i \ \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.
La famille u est sommable si et seulement si $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i < +\infty$.

Si $(u_i)_{i \in I}$ est sommable, alors $\{i \in I / u_i \neq 0\}$ est au plus dénombrable.
Pour la suite, on suppose que I est au plus dénombrable.

Lorsque $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite adaptée à I, les $\displaystyle\sum_{i \in J_n} u_i$ sont appelés des sommes partielles de u.
Lien entre la sommabilité de u et la convergence des sommes partielles.
Lorsque $I = \mathbb{N}$, u est sommable si et seulement si $\sum u_n$ converge.

Lorsqu'on travaille dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$, avec la convention $0 \times (+\infty) = 0$:
$v_i \leq w_i \Longrightarrow \displaystyle\sum_{i \in I} v_i \leq \sum_{i \in I} w_i$, $\displaystyle\sum_{i \in I} (\alpha v_i + w_i) = \alpha \sum_{i \in I} v_i + \sum_{i \in I} w_i$.

8 Familles sommables de complexes

Notation. I est au plus dénombrable, $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite adaptée à I et $u = (u_i)_{i \in I} \in \mathbb{C}^I$.

$(u_i)_{i \in I}$ est sommable ssi $(|u_i|)_{i \in I}$ est sommable, c'est-à-dire ssi $\displaystyle\sum_{i \in I} |u_i| < +\infty$.

Dans ce cas, $\displaystyle\sum_{i \in I} u_i = \lim_{n \to +\infty} \sum_{j \in J_n} u_j$.

Inégalité triangulaire.

9 Propriétés des familles sommables

Linéarité.

Les espaces $l^p(I, \mathbb{K})$ lorsque $p \in \{1, 2\}$.

Commutativité de la somme d'une famille sommable.

Sommation par paquets.
Théorème de Fubini.

Si $\sum a_n$ et $\sum b_n$ sont absolument convergentes alors $(a_p b_q)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable
et $\displaystyle\sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} a_p b_q = \Big(\sum_{p \in \mathbb{N}} a_p\Big)\Big(\sum_{q \in \mathbb{N}} b_q\Big)$.

Produit de Cauchy de deux séries.