Feuille d'exercices 26.
Correction de l'exercice 11

Exercice 26.11 :

1°) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. posons $t_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m$. Ainsi, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} u_{m,n} = \sum_{n=1}^{N}(t_n - t_{n+1}) = t_1 - t_{N+1}$, or $t_n = \frac{1}{n+1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc la série $\sum_{n\geq 1} u_{m,n}$ converge et sa somme vaut $v_m = t_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^m$.

Ainsi (v_m) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$. On en déduit que la série $\sum_{m\geq 1} v_m$ converge et $\sum_{m=1}^{+\infty} v_m = \frac{1}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$: $\frac{n}{n+1} \in [0,1[$ et $\frac{n+1}{n+2} \in [0,1[$, donc les séries géométriques $\sum_{m\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^m$ et $\sum_{m\geq 1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^m$ convergent et ont pour sommes respectivement $\frac{n}{n+1} \times \frac{1}{1-\frac{n}{n+1}}$ et $\frac{n+1}{n+2} \times \frac{1}{1-\frac{n+1}{n+2}}$.

Ainsi $\sum_{m\geq 1} u_{m,n}$ converge et $\sum_{m=1}^{+\infty} u_{m,n} = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+2}$.

On en déduit que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^{N} w_N = \frac{1}{2} - \frac{N+1}{N+2} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} - 1$. Ainsi, la série $\sum_{n\geq 1} w_n$ converge et a pour somme $-\frac{1}{2}$.

3°) Le théorème d'interversion des séries doubles ne s'applique pas ici. Ceci signifie que, dans l'énoncé de ce théorème, l'hypothèse "Pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\sum_{n} u_{m,n}$ est absolument convergente", on ne peut pas remplacer la convergence absolue par la semi-convergence.