
DM 43 : énoncé

Il s'agit d'un sujet supplémentaire pour votre travail personnel.

Il n'est pas à rendre.

Un corrigé sera fourni dans une semaine.

Problème 1 : une équation aux dérivées partielles

Soit f une application de $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ dans \mathbb{R} .

La quantité $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ désigne la dérivée (lorsqu'elle est définie) de l'application $x \mapsto f(x, y, z)$, où y et z sont considérés comme des constantes. Plus formellement, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(x+h, y, z) - f(x, y, z))$.

Supposons que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z)$ est définie pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Lorsque c'est défini, on pose alors $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) = \frac{\partial g}{\partial x}(x, y, z)$, où $g = \frac{\partial f}{\partial x}$.

Le laplacien de f désigne la quantité suivante, lorsqu'elle est définie :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

1°) Pour tout $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, on pose $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

On note u une application de classe C^2 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} et on pose $f = u \circ r$.

a) Exprimer $\frac{\partial r}{\partial x}$ en fonction de x et de r .

b) En déduire $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ en fonction de u , u' , u'' , r et x .

c) Exprimer Δf en fonction de u' , u'' et r .

On fixe $\omega \in \mathbb{R}_+^*$. On souhaite étudier l'équation aux dérivées partielles

$$(E_\omega) : \Delta f = -\omega^2 f,$$

sous les conditions précédentes, c'est-à-dire lorsque f est de la forme $f = u \circ r$, où u est une application de classe C^2 de \mathbb{R}_+^* dans \mathbb{R} .

2°) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $v(t) = tu(t)$.

a) Montrer que f est solution de (E_ω) si et seulement si v vérifie l'équation différentielle $(V) : v'' + \omega^2 v = 0$.

b) Déterminer les solutions $f = u \circ r$ non nulles de (E_ω) telles que $u(t)$ possède une limite finie lorsque t tend vers 0.

À présent, on suppose que $f = u \circ r$ est l'une des solutions obtenues à la question précédente.

3°) a) Montrer que $u'(1) = 0$ si et seulement si $\tan \omega = \omega$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Montrer qu'il existe un unique $\omega_n \in]\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + (n+1)\pi[$ tel que $\tan \omega_n = \omega_n$.

c) Soit n et p deux entiers naturels distincts. On suppose que $f_n = u_n \circ r$ (resp : $f_p = u_p \circ r$) est une solution de (E_{ω_n}) (resp : de (E_{ω_p})) telle que $u_n(t)$ (resp : $u_p(t)$) possède une limite finie lorsque t tend vers 0.

Montrer que $\int_0^1 u_n(t)u_p(t)t^2 dt = 0$, selon les deux méthodes suivantes :

- Par un calcul direct à l'aide des expressions de $u_n(t)$ et de $u_p(t)$ en fonction de t .
- En intégrant par parties, en tenant compte du fait que $t \mapsto tu_n(t)$ et $t \mapsto tu_p(t)$ sont solutions de (V) .

4°) Soit $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que $\omega_n = n\pi + \frac{3\pi}{2} - \arctan\left(\frac{1}{\omega_n}\right)$.

b) Montrer que $\omega_n = n\pi + \frac{3\pi}{2} - \frac{1}{n\pi} + \frac{\varepsilon_n}{n}$, où ε_n est une suite de réels qui tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Problème 2 : La variole

En 1760 Daniel Bernoulli présente à l'académie des sciences de Paris un mémoire intitulé "*Essai d'une nouvelle analyse de la mortalité causée par la petite vérole et des avantages de l'inoculation pour la prévenir*". Il y a adopté les hypothèses simplificatrices suivantes :

- indépendamment de son âge un individu a une probabilité $q \cdot \Delta x$ d'être infecté par la variole durant une période de durée Δx ;
- indépendamment de son âge un individu infecté pour la première fois meurt avec une probabilité p et survit avec une probabilité $1 - p$;
- lorsqu'un individu survit après avoir été infecté par la variole, il est immunisé pour le reste de sa vie.

Daniel Bernoulli estime que $p = q = \frac{1}{8}$. On adoptera les notations suivantes :

- On étudie l'évolution d'un groupe d'individus, initialement constitué de P_0 éléments nés la même année, où $P_0 \in \mathbb{N}^*$. On note x l'âge de ces individus, où x décrit \mathbb{R}_+ .
- La mortalité naturelle à l'âge x , i.e. de causes différentes de la variole, est notée $m(x)$. Autrement dit la probabilité de mourir entre l'âge x et l'âge $x + \Delta x$ est $m(x)\Delta x$.
- Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x sans avoir été infectés est noté $S(x)$. C'est un réel positif, et non un entier naturel, car c'est en fait la valeur moyenne du nombre d'individus encore en vie à l'âge x , si l'on répétait cette "expérience" (suivi d'un groupe de P_0 individus) un grand nombre de fois.
- Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x et immunisés est noté $R(x)$.

— Le nombre d'individus encore en vie à l'âge x est noté $P(x)$. On a donc $P(x) = S(x) + R(x)$. On convient que $x = 0$ au moment de la naissance des individus. Ainsi, $P(0) = P_0$.

On supposera que les applications S et R sont de classe C^1 .

Partie I : L'espérance de vie.

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Soit f une application continue de $[a, b]$ dans \mathbb{R}_+ .

1°) Lorsque $N \in \mathbb{N}^*$, interpréter la quantité $S_N = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{b-a}{N} f(a + k \frac{b-a}{N})$ comme une somme d'aires de rectangles afin d'expliquer informellement pourquoi

$S_N \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \int_a^b f(t) dt$. On dit que S_N est une somme de Riemann associée à f .

2°) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $k \in \{0, \dots, N\}$, on note A_k le point de coordonnées $(a + k \frac{b-a}{N}, 0)$ et B_k le point de coordonnées $(a + k \frac{b-a}{N}, f(a + k \frac{b-a}{N}))$. Montrer que si

l'on approche $\int_a^b f(t) dt$ par la somme des aires des trapèzes $A_k B_k B_{k+1} A_{k+1}$ pour k

variant de 0 à $N-1$, on obtient comme valeur approchée de $\int_a^b f(t) dt$ la quantité

$$T_N = \frac{b-a}{N} \left(\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{k=1}^{N-1} f(a + k \frac{b-a}{N}) \right).$$

3°) L'espérance de vie des P_0 éléments du groupe initial est la moyenne des durées de vie de ces individus, pondérée par le nombre d'individus accédant à chacune de ces durées de vie. Notons T la durée de vie maximale.

Expliquer informellement pourquoi on peut approcher cette espérance de vie par la

quantité $\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{T}{\Delta x} \rfloor + 1} k \Delta x \times \frac{P(k \Delta x) - P((k+1) \Delta x)}{P_0}$, où Δx est une durée aussi petite que

l'on veut.

En déduire qu'une bonne définition mathématique de l'espérance de vie des P_0 individus

$$\text{est } E = -\frac{1}{P_0} \int_0^{+\infty} x P'(x) dx.$$

4°) a) Montrer que $E = \frac{1}{P_0} \int_0^{+\infty} P(x) dx$.

b) L'unité de temps étant l'année, lorsque $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ désigne le nombre d'individus encore en vie après n années.

Montrer qu'une valeur approchée de E est donnée par $\tilde{E} = \frac{1}{2} + \frac{1}{P_0} \sum_{k=1}^{+\infty} P(k)$.

Partie II : Équations différentielles.

5°) a) Notons ΔS la variation de $S(x)$ entre x et $x + \Delta x$. Expliquer informellement pourquoi $\Delta S = -qS(x)\Delta x - m(x)S(x)\Delta x$, puis pourquoi on peut considérer que S est une solution de l'équation différentielle $(E_S) : S' = -(m(x) + q)S$.

b) De la même façon, montrer que R satisfait l'équation différentielle $(E_R) : R' = q(1 - p)S - m(x)R$.

6°) On pose $f = \frac{S}{P}$ et on suppose que f est bien définie.

a) Montrer que f satisfait l'équation différentielle $(E_f) : f' = -qf + pqf^2$.

b) En posant $g = \frac{1}{f}$, montrer que $f(x) = \frac{1}{(1 - p)e^{qx} + p}$.

c) Sous quelles hypothèses s'est-on placé pour effectuer ces calculs ?

7°) On suppose que l'application m est continue.

Intégrer directement les équations (E_S) et (E_R) et retrouver l'expression de $f(x)$ de la question 6.b. Que deviennent les hypothèses de la question 6.c ?

Partie III : Les avantages de la vaccination.

8°) a) Daniel Bernoulli estime le nombre de morts par la variole entre l'âge x et l'âge $x + 1$ à $\frac{1}{2}pq(S(x) + S(x + 1))$. Justifier cette formule en utilisant les questions 1 et 2.

On souhaite étudier l'efficacité d'une campagne de vaccination. Dans ce but, on note $P^*(x)$ le nombre d'individus qui seraient encore en vie à l'instant x si l'on suppose que les P_0 individus initiaux sont vaccinés à la naissance et que le vaccin les immunise complètement de la variole.

b) Une table de mortalité permet de connaître $P(n)$ pour tout entier naturel n .

Expliquer comment on peut alors remplir un tableau donnant, pour chaque entier naturel n , les quantités $P(n)$, $S(n)$ et $R(n)$, le nombre de morts par la variole pendant l'année et enfin $P^*(n)$.

9°) Le résultat de la question 4.b permet alors d'estimer les espérances de vie des P_0 individus initiaux, sans vaccination ou avec vaccination. Daniel Bernoulli obtient que l'espérance sans vaccination est $E = 26,57$ ans et que l'espérance avec vaccination est $E^* = 29,65$ ans. Cependant ce dernier calcul ne tient pas compte du risque que comporte l'inoculation du vaccin : on note p' la probabilité de mourir lors de la vaccination (peu après la naissance). On considère que le vaccin est *efficace* si et seulement si l'espérance de vie du groupe initial est supérieure en cas de vaccination. Déterminer la valeur maximale de p' . On pourra aussi critiquer le modèle utilisé.