DM 9 : facultatif

Exercice 1 : Une somme trigonométrique.

1°) Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. Sans utiliser de démonstration par récurrence, établir que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}$.

2°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer $C_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right)$.

Exercice 2 : Une somme de produits.

1°) Soit $(a_j)_{j\geq 1}$ une suite de nombres réels.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $P_k = \displaystyle\prod_{j=1}^{k}(1-a_j)$.

Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k P_{k-1} = 1$.

2°) Déduire de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1$.

3°) Donner une seconde démonstration de cette dernière égalité en faisant intervenir une somme télescopique.

Exercice 3 : Proximal d'une famille de points du plan.

1°) Soient n un entier naturel non nul et $z_1, \ldots, z_n$ des nombres complexes non nuls. Démontrer que $|z_1 + \cdots + z_n| = |z_1| + \cdots + |z_n|$ si et seulement si les z_i ont tous le même argument.

2°) Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
Soient $a_1, \ldots, a_n$ des nombres complexes non nuls dont les images dans le plan complexe sont notées $A_1, \ldots, A_n$. On suppose que $A_1, \ldots, A_n$ ne sont pas alignés.
On suppose de plus que $\dfrac{a_1}{|a_1|} + \dfrac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \dfrac{a_n}{|a_n|} = 0$.

Pour tout nombre complexe z, on pose $S = \dfrac{\overline{a_1}}{|a_1|}(a_1 - z) + \dfrac{\overline{a_2}}{|a_2|}(a_2 - z) + \cdots + \dfrac{\overline{a_n}}{|a_n|}(a_n - z)$.

a) Vérifier que $S = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$.

b) En déduire que, pour tout nombre complexe z :

$$(*) : |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z|.$$

Traduire géométriquement cette inégalité (c'est-à-dire à l'aide des points $O, A_1, \ldots, A_n$ et du point M d'affixe z) et interpréter.

c) Démontrer qu'il y a égalité dans l'inégalité $(*)$ si et seulement si z est nul.

Exercice 4.

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$. Quel est le nombre de suites strictement monotones constituées de p nombres de l'ensemble d'entiers $\{1, \ldots, n\}$?

Problème : Dénombrement par involution.

Principe d'involution.

1°) Soit E un ensemble fini. On suppose que E_+ et E_- sont deux parties disjointes de E dont la réunion est égale à E. Ainsi, $E_+ \cap E_- = \emptyset$ et $E = E_+ \sqcup E_-$.
Considérons $f : E \longrightarrow E$ une involution, c'est-à-dire une application telle que $f \circ f = \mathrm{Id}_E$.
On note $F_f = \{x \in E \ / \ f(x) = x\}$ l'ensemble des points fixes de f. On suppose que tous les points fixes de f appartiennent à E_+, c'est-à-dire $F_f \subset E_+$.

On suppose également que l'involution f est alternante, c'est-à-dire que :
$\forall x \in E_+ \setminus F_f,\ f(x) \in E_-$ et $\forall x \in E_-,\ f(x) \in E_+$.
Démontrer que $\mathrm{card} F_f = \mathrm{card} E_+ - \mathrm{card} E_-$.

Chemins de Dyck.

On munit le plan d'un repère orthonormal $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$. On rappelle que la notation $M(a,b)$ signifie que le point M est de coordonnées (a,b) dans le repère $(O; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.
Pour tout entier naturel s, on appelle chemin de longueur s la donnée d'une liste $(M_0, \dots, M_s)$ de $s+1$ points à coordonnées entières tels que $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} \in \{\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\}$ pour tout $k \in \{1, \dots, s\}$. On dit alors que les M_k sont les sommets du chemin joignant le point de départ M_0 au point d'arrivée M_s.

2°) Soient a, b, c, d quatre entiers relatifs tels que $a \leq c$ et $b \leq d$. Dénombrer les chemins joignant les points de coordonnées (a,b) et (c,d).

Pour tout entier naturel n, on appelle chemin de Dyck d'ordre n un chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$ de longueur $2n$ joignant les points $M_0(0,0)$ et $M_{2n}(n,n)$ tel que tous les sommets ont une abscisse supérieure ou égale à l'ordonnée. Cela revient à dire que le chemin reste en dessous de la première diagonale du plan.
On veut déterminer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le nombre C_n de chemins de Dyck d'ordre n.

3°) Déterminer C_0, C_1, C_2 et C_3. *On fera des dessins.*

On fixe $n \in \mathbb{N}$.
On note E_+ l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées $(1,0)$ et $(n+1,n)$.
On note E_- l'ensemble des chemins joignant les points de coordonnées $(0,1)$ et $(n+1,n)$.
On pose $E = E_+ \sqcup E_-$.
Pour tout point M de coordonnées (x,y), on note $\widetilde{M}$ le point de coordonnées (y,x).
On définit l'application $f : E \longrightarrow E$ qui, à un chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$, associe

- le chemin $(M_0, \dots, M_{2n})$ lorsque tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée ;
- le chemin de sommets $(\widetilde{M_0}, \dots, \widetilde{M_k}, M_{k+1}, \dots, M_{2n})$ avec k le premier indice d'un sommet où l'abscisse est égale à l'ordonnée, sinon.

4°) Vérifier que f est une involution alternante et préciser F_f.

5°) En déduire que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$.

3 : Formule du crible.

Soient $A_1, \ldots, A_n$ des ensembles finis. On pose $U = A_1 \cup \cdots \cup A_n$.
On définit les ensembles suivants :

- $E = \left\{(x, I) \in U \times \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}) \ / \ x \in \bigcap\limits_{k \in I} A_k\right\}$;
- $E_+ = \{(x, I) \in E \ / \ \mathrm{card}(I) \text{ pair}\}$;
- $E_- = \{(x, I) \in E \ / \ \mathrm{card}(I) \text{ impair}\}$.

On convient que, lorsque $I = \emptyset$, $\bigcap\limits_{k \in \emptyset} A_k = U$.
Pour tout élément x de U, on pose $m(x) = \max\{k \in \{1, \ldots, n\} \ / \ x \in A_k\}$.
On considère l'application $f \ : \ E \longrightarrow E$ qui, à tout élément (x, I) de E, lui associe
$f((x, I)) = \begin{cases} (x, I \cup \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \notin I \\ (x, I \setminus \{m(x)\}) & \text{si } m(x) \in I \end{cases}$

6°) Vérifier que f est une involution alternante et préciser F_f.

7°) En déduire la formule du crible.

4 : Bijection de Garcia-Milne.

Soient A et B deux ensembles finis.
On suppose que A_+ et A_- sont deux parties disjointes de A dont la réunion est égale à A et que B_+ et B_- sont deux parties disjointes de B dont la réunion est égale à B.
On considère $f \ : \ A \longrightarrow A$ et $g \ : \ B \longrightarrow B$ deux involutions alternantes telles que $F_f \subset A_+$ et $F_g \subset B_+$.
On suppose également l'existence d'une bijection $\varphi \ : \ A \longrightarrow B$ qui *conserve les signes*, c'est-à-dire $\forall x \in A_+$, $\varphi(x) \in B_+$ et $\forall x \in A_-$, $\varphi(x) \in B_-$.

8°) Démontrer que $\mathrm{card} F_f = \mathrm{card} F_g$.

9°) Démontrer que, pour tout élément x de F_f, il existe un entier naturel $\alpha(x)$ tel que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\alpha(x)}(x) \in F_g$. *La puissance désigne une itération pour la loi* $\circ$.

10°) Exhiber une bijection entre F_f et F_g.