

DS 4 : corrigé

Le barème est sur 45 points.

Exercice 1 : Une somme trigonométrique (sur 4 points).

1°) (3 points) Linéarisons : $\cos^2(\theta) = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, donc

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \sum_{k=0}^n \frac{1 + \cos(2kx)}{2} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^n \cos(2kx).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(2kx) &= \sum_{k=0}^n \operatorname{Re}(\cos(2kx) + i \sin(2kx)) \\ &= \operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^n e^{i2kx}\right) \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i2(n+1)x} - 1}{e^{i2x} - 1}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(somme géométrique} \\ \text{de raison } e^{i2x} \neq 1, \text{ car } x \notin \pi\mathbb{Z}) \end{array} \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i(n+1)x}(e^{i(n+1)x} - e^{-i(n+1)x})}{e^{ix}(e^{ix} - e^{-ix})}\right) \quad \begin{array}{l} \text{(technique de} \\ \text{l'angle moyen)} \end{array} \\ &= \operatorname{Re}\left(e^{inx} \frac{2i \sin((n+1)x)}{2i \sin(x)}\right) \quad \text{(formules d'Euler)} \\ &= \operatorname{Re}\left(\frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} e^{inx}\right) \\ &= \frac{\sin((n+1)x)}{\sin(x)} \cos(nx) \\ &= \frac{\sin((2n+1)x) + \sin(x)}{2 \sin(x)} \quad \left(\text{car } \sin(a) \cos(b) = \frac{\sin(a+b) + \sin(a-b)}{2}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{\sin((2n+1)x)}{2 \sin(x)}. \end{aligned}$$

En rassemblant ces résultats, il vient

$$\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{n+1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)},$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\sum_{k=0}^n \cos^2(kx) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin((2n+1)x)}{4\sin(x)}}.$$

2°) (1 point) Dans le résultat de la question précédente, posons

$$x = \frac{\pi}{2n+1},$$

ce qui est licite puisque, sous la condition $n \neq 0$, on a $0 < \pi/(2n+1) < \pi$, ce qui assure que $x \notin \pi\mathbb{Z}$. On obtient

$$C_n = \sum_{k=0}^n \cos^2\left(\frac{k\pi}{2n+1}\right) = \frac{2n+3}{4} + \frac{\sin(\pi)}{4\sin(x)} = \frac{2n+3}{4}.$$

En conclusion,

$$\boxed{C_n = \frac{2n+3}{4}}.$$

Exercice 2 : Une somme de produits (sur 6 points).

1°) (2 points) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$\mathcal{P}(n) : P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$$

Initialisation : On a $P_0 = \prod_{j=1}^0 (1 - a_j) = 1$ (convention pour un produit vide) et

$\sum_{k=1}^0 a_k P_{k-1} = 0$ (convention pour une somme vide), donc

$$P_0 + \sum_{k=1}^0 a_k P_{k-1} = 1 + 0 = 1,$$

ce qui établit $\mathcal{P}(0)$.

Hérédité : Fixons $n \in \mathbb{N}$ tel que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et démontrons que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.

On a

$$\begin{aligned} P_{n+1} + \sum_{k=1}^{n+1} a_k P_{k-1} &= (1 - a_{n+1})P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} + a_{n+1}P_n \\ &= P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} \\ &= 1, \quad \text{par hypothèse de récurrence.} \end{aligned}$$

ce qui démontre que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

Conclusion : D'après le principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P_n + \sum_{k=1}^n a_k P_{k-1} = 1.$$

2°) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $j \geq 1$, on pose

$$a_j = \frac{j}{n}.$$

On a

$$P_n = \prod_{j=1}^n \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \underbrace{\left(1 - \frac{n}{n}\right)}_{=0} = 0,$$

et, pour tout $k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket$, on a

$$P_k = \prod_{j=1}^k \left(1 - \frac{j}{n}\right) = \frac{1}{n^k} \prod_{j=1}^k (n-j) = \frac{k!}{n^k} \frac{\prod_{j=1}^k (n-j)}{k!} = \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k}.$$

Le résultat de la question 1 nous donne

$$0 + \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} \frac{(k-1)!}{n^{k-1}} \binom{n-1}{k-1} = 1,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^n \frac{k!}{n^k} \binom{n-1}{k-1} = 1.$$

Par conséquent,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = 1.$$

3°) (2 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la formule du triangle de Pascal, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, $\binom{n-1}{k-1} = \binom{n}{k} - \binom{n-1}{k}$, en convenant que $\binom{n-1}{k} = 0$ lorsque $k = n$. Ainsi, $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k} \frac{k!}{n^k} - \binom{n-1}{k} \frac{k!}{n^k} \right]$.

De plus, d'après la formule comité-président, $k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1}$,

donc $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = \sum_{k=1}^n \left[\binom{n-1}{k-1} \frac{(k-1)!}{n^{k-1}} - \binom{n-1}{k} \frac{k!}{n^k} \right]$: c'est une somme télescopique,

donc $\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \frac{k!}{n^k} = \binom{n-1}{0} \frac{0!}{n^0} - \binom{n-1}{n} \frac{n!}{n^n} = 1$. On retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

Exercice 3 : Proximal d'une famille de points du plan (sur 10 points).

1°) (3 points) On procède par double-implication.

\Leftarrow Supposons que tous les z_i ont le même argument.

Il existe $\theta \in \mathbb{R}$ et $r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $z_i = r_i e^{i\theta}$. Alors $|z_1 + \dots + z_n| = |(r_1 + \dots + r_n) e^{i\theta}| = r_1 + \dots + r_n = |z_1| + \dots + |z_n|$.

\Rightarrow Pour la réciproque, on suppose que $|z_1 + \dots + z_n| = |z_1| + \dots + |z_n|$.

Soit i, j tels que $1 \leq i < j \leq n$. Alors,

$$\begin{aligned} |z_1 + \dots + z_n| &= \left| z_i + z_j + \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k \neq i) \wedge (k \neq j)}} z_k \right| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k \neq i) \wedge (k \neq j)}} z_k \right| + |z_i + z_j| \\ &\leq \left| \sum_{\substack{1 \leq k \leq n \\ (k \neq i) \wedge (k \neq j)}} z_k \right| + |z_i| + |z_j| \\ &\leq |z_1| + \dots + |z_n| = |z_1 + \dots + z_n|. \end{aligned}$$

Toutes ces quantités sont donc égales. Ainsi, $|z_i + z_j| = |z_i| + |z_j|$, donc d'après le cours, $\frac{z_i}{z_j} \in \mathbb{R}_+ : z_i$ et z_j ont le même argument.

En définitive,

$ z_1 + \dots + z_n = z_1 + \dots + z_n $ si, et seulement si, les z_i ont tous le même argument.

2°) a) (1 point) Pour tout nombre complexe z , on a

$$\begin{aligned} S &= \left(\frac{\overline{a_1}a_1}{|a_1|} + \frac{\overline{a_2}a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{\overline{a_n}a_n}{|a_n|} \right) - \left(\frac{\overline{a_1}}{|a_1|} + \frac{\overline{a_2}}{|a_2|} + \cdots + \frac{\overline{a_n}}{|a_n|} \right) z \\ &= \left(\frac{|a_1|^2}{|a_1|} + \frac{|a_2|^2}{|a_2|} + \cdots + \frac{|a_n|^2}{|a_n|} \right) - \underbrace{\left(\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|a_n|} \right)}_{=0} z \\ &= |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|, \end{aligned}$$

ce qui démontre que

$$\boxed{S = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

b) \diamond (1 point) Soit z un nombre complexe.

La question précédente nous dit que S est un nombre réel strictement positif. Il est donc égal à son module. Autrement dit, on a

$$|S| = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|.$$

Par ailleurs, l'inégalité triangulaire nous dit que

$$|S| \leq \left| \frac{\overline{a_1}}{|a_1|}(a_1 - z) \right| + \left| \frac{\overline{a_2}}{|a_2|}(a_2 - z) \right| + \cdots + \left| \frac{\overline{a_n}}{|a_n|}(a_n - z) \right| \quad (**)$$

c'est-à-dire, puisque $|\overline{a_k}| = |a_k|$,

$$|S| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z|.$$

En combinant ces résultats, on obtient

$$|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z|.$$

On a donc démontré que

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C}, \quad |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n| \leq |a_1 - z| + |a_2 - z| + \cdots + |a_n - z| \quad (*).$$

\diamond (2 points) Géométriquement, cela signifie que pour tout point M du plan, on a $OA_1 + OA_2 + \cdots + OA_n \leq MA_1 + MA_2 + \cdots + MA_n$, autrement dit O minimise la somme des distances aux points A_1, A_2, \dots, A_n .

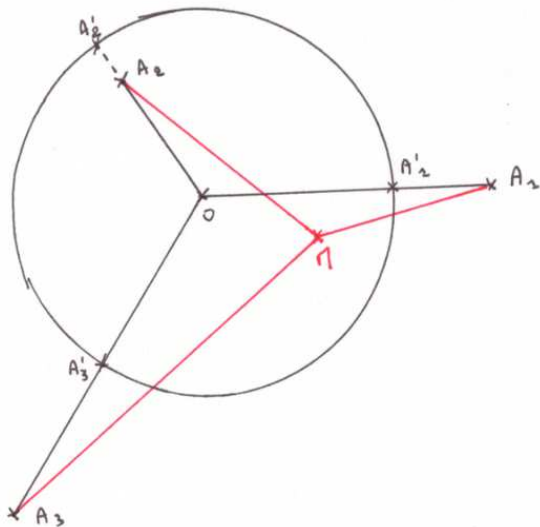
D'après l'énoncé, pour que O vérifie cette propriété, il suffit que

$\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|a_n|} = 0$. Traduisons géométriquement cette dernière condition :

Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la demi-droite $[OA_i)$ rencontre le cercle C de centre O et de rayon 1 en le point A'_i d'affixe $\frac{a_i}{|a_i|}$. L'isobarycentre des points A'_1, \dots, A'_n a pour affixe

$\frac{a_1}{|a_1|} + \frac{a_2}{|a_2|} + \cdots + \frac{a_n}{|a_n|}$. Ainsi, lorsque O est le centre de gravité des points A'_1, \dots, A'_n , il

minimise la somme des distances aux points A_1, A_2, \dots, A_n . La figure suivante illustre



c) (3 points) Supposons qu'il y a égalité dans (*).

En reprenant le raisonnement de la question précédente, on voit que cela implique qu'il y a égalité dans l'inégalité triangulaire (**). D'après la question 1, cela signifie que tous les $\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}(a_k - z)$ ont le même argument (tout au moins ceux qui sont non nuls).

Cet argument commun est alors celui de leur somme S , dont l'argument est 0 (on a vu que $S = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n|$ est un nombre réel strictement positif). On en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{\overline{a_k}}{|a_k|}(a_k - z)$ est un nombre réel positif ou nul.

En divisant par $|a_k| = \sqrt{a_k \overline{a_k}}$ qui est un nombre réel strictement positif, on en déduit que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\frac{a_k - z}{a_k}$ est un nombre réel positif ou nul.

Notons M le point d'affixe z . Alors $a_k - z$ est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{MA_k}$ et a_k est l'affixe du vecteur $\overrightarrow{OA_k}$, donc il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$ tel que $\overrightarrow{MA_k} = \lambda \overrightarrow{OA_k}$.

Cela implique que, pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$, les points O, A_k, M sont alignés.

Si $M \neq O$, alors A_1, \dots, A_n sont tous sur la droite (OM) , donc ils sont alignés ce qui est contraire aux hypothèses de l'énoncé. Ainsi $M = O$ et $z = 0$.

Réciproquement, si $z = 0$, on a clairement égalité dans (*).

En conclusion,

il y a égalité dans l'inégalité (*) si, et seulement si, z est nul.

Exercice 4 (sur 2 points).

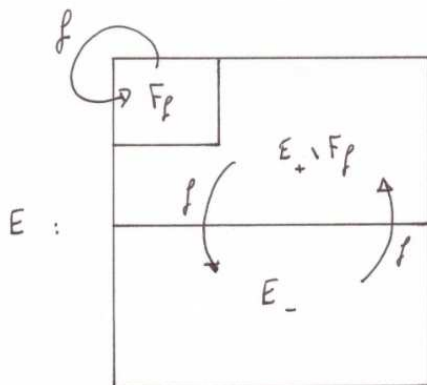
Pour construire une suite strictement monotone de p nombres de l'intervalle $\llbracket 1; n \rrbracket$, il suffit de choisir p valeurs dans $\llbracket 1; n \rrbracket$ (il y a $\binom{n}{p}$ choix), puis de choisir l'ordre, croissant ou décroissant, de la suite : lorsque $p \geq 2$, il y a 2 choix, mais lorsque $p = 1$, il n'y a qu'un choix, la suite étant alors constituée d'un seul élément.

En conclusion, lorsque $p \geq 2$, il existe $2\binom{n}{p}$ suites strictement monotones de p nombres dans l'intervalle $\llbracket 1; n \rrbracket$, et lorsque $p = 1$, il en existe n .

Problème : Dénombrement par involution (sur 23 points).

Principe d'involution (sur 2 points).

1°) (2 points)



◇ Montrons que $E_- = f(E_+ \setminus F_f)$, par double inclusion :

Si $x \in E_+ \setminus F_f$, d'après l'énoncé, $f(x) \in E_-$, donc $f(E_+ \setminus F_f) \subset E_-$.

Réciproquement, soit $x \in E_-$. Posons $y = f(x)$. f étant involutive, $x = f(y)$.

Si $y \in E_-$, alors $x = f(y) \in E_+$, ce qui est faux.

Si $y \in F_f$, alors $x = f(y) = y \in F_f$, ce qui est faux.

Ainsi, $y \in E_+ \setminus E_-$ et $x = f(y) \in f(E_+ \setminus F_f)$.

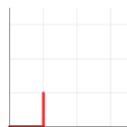
◇ f étant bijective, on en déduit que $|E_-| = |f(E_+ \setminus F_f)| = |E_+ \setminus F_f| = |E_+| - |F_f|$, ce qui prouve que $\text{card } F_f = \text{card } E_+ - \text{card } E_-$.

Chemins de Dyck (sur 9 points).

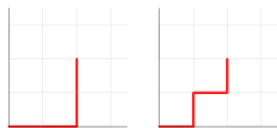
2°) (2 points) Soit (M_0, \dots, M_s) un chemin joignant $M_0(a, b)$ et M_s . D'après la relation de Chasles, $\overrightarrow{M_0M_s} = \sum_{k=1}^s \overrightarrow{M_{k-1}M_k}$. Notons α (resp : β) le nombre de $k \in \{1, \dots, s\}$ tels que $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{i}$ (resp : $\overrightarrow{M_{k-1}M_k} = \vec{j}$). Alors la relation précédente devient $\overrightarrow{M_0M_s} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j}$, donc M_s est le point de coordonnées (c, d) si et seulement si $\alpha = c - a$ et $\beta = d - b$. Ainsi, pour construire un chemin joignant les points de coordonnées (a, b) et (c, d) , on impose $M_0(a, b)$, puis on choisit $c - a$ fois une arête horizontale et $d - b$ fois une arête verticale. Choisir un tel chemin revient donc à choisir les positions des $c - a$ arêtes horizontales parmi l'ensemble des $c - a + d - b$ arêtes au total. Les autres arêtes sont alors verticales. Donc

il y a $\binom{c - a + d - b}{c - a}$ chemins joignant les points de coordonnées (a, b) et (c, d) .

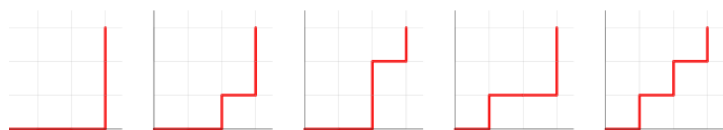
3°) (1 point) Le chemin $(M_0(0, 0))$, de longueur nulle, est l'unique chemin joignant le point de coordonnées $(0, 0)$ à lui-même. C'est un chemin de Dyck, donc $C_0 = 1$. Les figures suivantes indiquent les différents chemins de Dyck d'ordre 1, 2 et 3.



$C_1 = 1.$

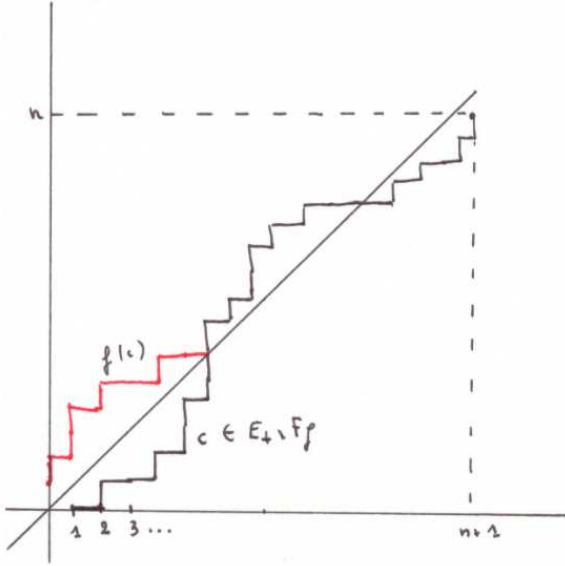


$C_2 = 2.$



$C_3 = 5.$

4°) (3 points) La figure suivante illustre les définitions de E et de f : on a tracé un chemin c de $E_+ \setminus F_f$: le chemin $f(c)$ est obtenu en commençant par le chemin rouge. Ce dernier chemin est un chemin de E_- .



— D'après la solution de la question 2, tout chemin joignant les points de coordonnées (a, b) et (c, d) sont de longueur $s = (c - a) + (d - b)$, donc tous les chemins de l'ensemble E sont bien de longueur $2n$.

— Considérons un chemin (M_0, \dots, M_{2n}) de E et supposons que l'un de ses sommets n'a pas une abscisse strictement supérieure à son ordonnée. Montrons que l'entier "k" de l'énoncé existe bien.

En notant $M_i(x_i, y_i)$ pour tout $i \in \{0, \dots, 2n\}$, il existe i tel que $x_i \leq y_i$. Alors l'ensemble $\{i \in \{0, \dots, 2n\} / x_i \leq y_i\}$ est une partie non vide de $\{0, \dots, 2n\}$, donc elle possède un minimum que l'on note k .

On sait que $x_{2n} = n + 1 > n = y_{2n}$, donc $k < 2n$. Ainsi, $x_k \leq y_k$ et $x_{k+1} > y_{k+1}$, ce que l'on peut aussi écrire $x_k - y_k \leq 0$ et $x_{k+1} - y_{k+1} > 0$.

Or $\overrightarrow{M_k M_{k+1}} \in \{\vec{i}, \vec{j}\}$, donc $(x_{k+1} = x_k + 1) \wedge (y_{k+1} = y_k)$ ou bien

$(y_{k+1} = y_k + 1) \wedge (x_{k+1} = x_k)$. On en déduit que $[x_{k+1} - y_{k+1}] - [x_k - y_k] \in \{-1, 1\}$.

Or $x_k - y_k \leq 0$ et $x_{k+1} - y_{k+1} > 0$, donc $[x_{k+1} - y_{k+1}] - [x_k - y_k] = 1$, puis $x_{k+1} - y_{k+1} = 1$ et $x_k - y_k = 0$.

Ceci démontre que $x_k = y_k$ et plus précisément que k est le premier indice d'un sommet où l'abscisse est égale à l'ordonnée.

— Considérons un chemin $c = (M_0, \dots, M_{2n})$ de E et supposons que l'un de ses sommets n'a pas une abscisse strictement supérieure à son ordonnée.

L'existence de k étant prouvée, $f(M_0, \dots, M_{2n})$ est définie et égale à $(\widetilde{M}_0, \dots, \widetilde{M}_k, M_{k+1}, \dots, M_{2n})$.

Lorsque $c \in E_+$, $M_0(1, 0)$, donc $\widetilde{M}_0(0, 1)$, donc $f(c) \in E_-$.

De même, lorsque $c \in E_-$, $f(c) \in E_+$.

Lorsque tous les sommets de c ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée, $f(c) = c$.

Ceci démontre que f est correctement définie, en tant qu'application de E dans E .

— Notons F l'ensemble des chemins de E dont tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée.

Ce qui précède prouve que $f(E_-) \subset E_+$ et $f(E_+ \setminus F) \subset E_-$. De plus $F \subset E_+$ et, pour tout $c \in F$, $f(c) = c$. Ainsi, si f est une involution, elle est alternante

- et $F_f = F$. Montrons pour terminer que f est bien une involution.
- Soit $c = (M_0, \dots, M_{2n})$ un chemin de E .
 - Si $c \in F_f$, alors $f(c) = c$, donc $f \circ f(c) = c$.
 - Supposons que $c \in E_+ \setminus F_f$. Alors k est correctement défini et $f(c) = (\widetilde{M}_0, \dots, \widetilde{M}_k, M_{k+1}, \dots, M_{2n}) \in E_-$.
 Pour tout $i \in \{0, \dots, k-1\}$, $\widetilde{M}_i(y_i, x_i)$ et $x_i > y_i$. De plus $x_k = y_k$, donc k désigne encore le premier indice d'un sommet, parmi $f(c)$, où l'abscisse est égale à l'ordonnée. On en déduit que $f(f(c)) = (\widetilde{\widetilde{M}}_0, \dots, \widetilde{\widetilde{M}}_k, M_{k+1}, \dots, M_{2n})$,
 or pour tout point du plan, $\widetilde{\widetilde{M}} = M$, donc $f(f(c)) = c$.
 - De même, si $c \in E_-$, on montre que $f \circ f(c) = c$.

5°) (3 points) La question précédente nous dit que F_f est constitué des chemins joignant $(1, 0)$ à $(n+1, n)$ dont tous les sommets ont une abscisse strictement supérieure à l'ordonnée. L'image par la translation de vecteur $(-1, 0)$ d'un tel chemin est un chemin de Dyck d'ordre n . Réciproquement, l'image d'un chemin de Dyck d'ordre n par la translation de vecteur $(1, 0)$ donne un élément de F_f . L'ensemble F_f est donc en bijection avec l'ensemble des chemins de Dyck. Par conséquent, on a

$$\text{card } F_f = C_n.$$

Le résultat de la question 2 nous dit par ailleurs que

$$\text{card } E_+ = \binom{2n}{n} \quad \text{et} \quad \text{card } E_- = \binom{2n}{n+1}.$$

Par conséquent, $C_n = \binom{2n}{n} - \binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} - \frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}$,

Ainsi, $C_n = \binom{2n}{n} \left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$.

_____ Remarque culturelle : _____

Le nombre C_n est le n -ème nombre de Catalan. Ces nombres interviennent dans de nombreux problèmes de dénombrement. Outre les chemins de Dyck, C_n compte les différentes façons de placer des parenthèses autour de $n+1$ facteurs (pour préciser une expression faisant intervenir n fois une loi de composition interne non associative). C_n est également le nombre d'arbres binaires entiers à $n+1$ feuilles ; le nombre de façons de découper en triangles un polygone convexe à $n+2$ côtés en reliant certains de ses sommets par des segments de droite etc.

3 : Formule du crible (sur 4 points).

6°) (2 points)

Nous allons démontrer que f est bien définie et alternante puis que c'est une involution.

Soit (x, I) un élément de E . On a donc $x \in \bigcap_{k \in I} A_k$.

▷ Supposons que $(x, I) \in E_+$, c'est-à-dire que $\text{card } I$ est pair.

— Si $m(x) \notin I$, alors $f((x, I)) = (x, I \cup \{m(x)\})$. Par définition de $m(x)$, on a $x \in A_{m(x)}$ donc $x \in \bigcap_{k \in I \cup \{m(x)\}} A_k$, ce qui donne $(x, I \cup \{m(x)\}) \in E$. De plus,

$I \cup \{m(x)\}$ est de cardinal impair, donc $(x, I \cup \{m(x)\}) \in E_-$. Ainsi, on a $f((x, I)) \in E_-$.

— Si $m(x) \in I$, alors $f((x, I)) = (x, I \setminus \{m(x)\})$. Comme $I \setminus \{m(x)\} \subset I$, on a évidemment $x \in \bigcap_{k \in I \setminus \{m(x)\}} A_k$, donc $(x, I \setminus \{m(x)\}) \in E$. De plus, $I \setminus \{m(x)\}$

est de cardinal impair, donc $(x, I \setminus \{m(x)\}) \in E_-$. Ainsi, on a $f((x, I)) \in E_-$.

Cela démontre que $f(E_+) \subset E_-$.

On démontre de même que $f(E_-) \subset E_+$.

Cela démontre que f est bien définie et alternante, avec $F_f = \emptyset$.

▷ Si $m(x) \notin I$, alors

$$(f \circ f)((x, I)) = f(x, I \cup \{m(x)\}) = (x, (I \cup \{m(x)\}) \setminus \{m(x)\}) = (x, I).$$

Si $m(x) \in I$, alors

$$(f \circ f)((x, I)) = f(x, I \setminus \{m(x)\}) = (x, (I \setminus \{m(x)\}) \cup \{m(x)\}) = (x, I).$$

Cela démontre que $f \circ f = \text{Id}_E$, c'est-à-dire que f est une involution.

On a ainsi démontré que f est une involution alternante avec $F_f = \emptyset$.

7°) (2 points) D'après la question 1,

$$\text{card } F_f = \text{card } E_+ - \text{card } E_-.$$

On a

$$\text{card } F_f = 0$$

et

$$\text{card } E_+ = \text{card}\{(x, I) \in E / \text{card } I \text{ pair}\} = \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ pair}}} \sum_{x \in \bigcap_{k \in I} A_k} 1 = \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ pair}}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k$$

et

$$\text{card } E_- = \text{card}\{(x, I) \in E / \text{card } I \text{ impair}\} = \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ impair}}} \sum_{x \in \bigcap_{k \in I} A_k} 1 = \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ impair}}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k.$$

Donc

$$0 = \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ pair}}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k - \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I \text{ impair}}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k$$

c'est-à-dire

$$\sum_{I \subset [1;n]} (-1)^{\text{card } I} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k = 0$$

ou encore

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I = i}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k = 0.$$

Pour $i = 0$, on a $I = \emptyset$ et l'on a convenu que $\bigcap_{k \in \emptyset} A_k = U$,

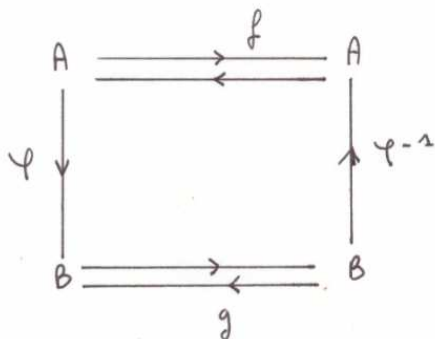
c'est-à-dire que $\bigcap_{k \in \emptyset} A_k = A_1 \cup \dots \cup A_n$, donc

$$\text{card}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1} \sum_{\substack{I \subset [1;n] \\ \text{card } I = i}} \text{card} \bigcap_{k \in I} A_k.$$

Il s'agit bien de la formule du crible.

4 : Bijection de Garcia-Milne (sur 8 points).

8°) (1 point) La figure suivante résume l'énoncé :



Par hypothèse, $\varphi(A_+) \subset B_+$. De plus $\varphi(A_-) \subset B_-$, donc $B \setminus B_- \subset A \setminus \varphi(A_-)$, c'est-à-dire que $B_+ \subset \varphi(A_+)$. ainsi, $\varphi(A_+) = B_+$ et de même $\varphi(A_-) = B_-$. Or φ est une bijection, donc

$$\text{card } A_+ = \text{card } B_+ \quad \text{et} \quad \text{card } A_- = \text{card } B_-.$$

Le principe d'involution appliqué à f et à g donne

$$\text{card } F_f = \text{card } A_+ - \text{card } A_- = \text{card } B_+ - \text{card } B_- = \text{card } F_g,$$

donc

$$\boxed{\text{card } F_f = \text{card } F_g.}$$

9°) (4 points) Soit $x \in F_f$. Par l'absurde : on suppose que pour tout entier naturel k , on a $(H_k) : \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \notin F_g$.

◇ Montrons par récurrence que pour tout entier naturel k , on a $R(k) : \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in B_+ \setminus F_g$.

Pour $k = 0$, $x \in F_f$, donc $x \in A_+$ puis $\varphi(x) \in B_+$. De plus, d'après (H_0) , $\varphi(x) \notin F_g$, donc $\varphi(x) \in B_+ \setminus F_g$, ce qui prouve $R(0)$.

Supposons maintenant que $k \geq 0$ et que $R(k)$ est vraie.

Posons $y = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x)$. D'après $R(k)$, $y \in B_+ \setminus F_g$, donc $g(y) \in B_-$, puis $z = \varphi f \varphi^{-1} g(y) \in B_+$.

Mais $z = (\varphi f \varphi^{-1} g) \varphi (f \varphi^{-1} g \varphi)^k = \varphi (f \varphi^{-1} g \varphi)^{k+1}$, donc d'après (H_{k+1}) , $z \notin F_g$. Ceci démontre que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{k+1}(x) \in B_+ \setminus F_g$, ce qui prouve $R(k+1)$.

◇ Comme les ensembles sont finis, le principe des tiroirs dit qu'il existe $i > j \geq 0$ tels que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^i(x) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^j(x)$, c'est-à-dire $(f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^\ell(x) = x$ où $\ell = i - j$ est un entier naturel non nul.

Comme $f(x) = x$, en utilisant que f et g sont des involutions, on en déduit que $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\ell-1}(x) = (g \circ \varphi)(x)$.

Le membre de gauche est dans $B_+ \setminus F_g$ alors que le membre de droite est dans $F_g \sqcup B_-$. C'est absurde donc

$$\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } F_f, \text{ il existe un entier naturel } \alpha(x) \text{ tel que } \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{\alpha(x)}(x) \in F_g.}$$

10°) (3 points) Pour tout élément x de F_f , l'ensemble $\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\}$ est donc une partie non vide de \mathbb{N} . D'après le cours, on peut poser

$$r(x) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\}.$$

On considère alors l'application

$$\psi \begin{cases} F_f & \longrightarrow & F_g \\ x & \longmapsto & \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x)}(x) \end{cases}$$

Soient $x_1, x_2 \in F_f$ tels que $\psi(x_1) = \psi(x_2)$, c'est-à-dire

$$\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)}(x_1) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_2)}(x_2).$$

Par l'absurde : on suppose que $r(x_1) \neq r(x_2)$, par exemple $r(x_1) > r(x_2)$.

Il vient

$$(f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)-r(x_2)}(x_1) = x_2$$

puis, comme $f(x_2) = x_2$,

$$\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)-r(x_2)-1}(x_1) = (g^{-1} \circ \varphi)(x_2).$$

Comme $0 \leq r(x_1) - r(x_2) - 1 < r(x_1)$, la minimalité de $r(x_1)$ nous dit que le membre de gauche appartient à $B_+ \setminus F_g$ (en adaptant la récurrence de la question précédente) alors que le membre de droite est dans $F_g \sqcup B_-$. C'est absurde, donc $r(x_1) = r(x_2)$.

La relation $\varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_1)}(x_1) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x_2)}(x_2)$ nous dit alors que $x_1 = x_2$.

L'application ψ est donc injective.

Comme $\text{card } F_f = \text{card } F_g$, on peut affirmer que ψ est une bijection entre F_f et F_g .

En conclusion,

l'application $\psi : F_f \longrightarrow F_g$ définie par $\forall x \in F_f, \psi(x) = \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^{r(x)}(x)$ où $r(x) = \min\{k \in \mathbb{N} : \varphi \circ (f \circ \varphi^{-1} \circ g \circ \varphi)^k(x) \in F_g\}$ est une bijection entre F_f et F_g .