DM 17
Les caractères d'un groupe

Questions préliminaires

1°) $\mathbb{C}^*$ est-il un groupe pour l'addition ? Justifier.
$\mathbb{C}^*$ est-il un groupe pour la multiplication ? Justifier.

Si G est un groupe, les morphismes de groupes de G dans $\mathbb{C}^*$ s'appellent les caractères de G.

2°) Soit g un caractère d'un groupe $(G, .)$.
Montrer que, pour tout $x \in G$ et $a \in \mathbb{Z}$, $g(x^a) = g(x)^a$.
Que devient cette propriété lorsque g est un caractère d'un groupe commutatif noté $(G, +)$?

Partie 1 : Caractères de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{R}$

3°) Déterminer les caractères de $\mathbb{Z}$.

4°) Soit g un caractère de $\mathbb{R}$, que l'on suppose dérivable.
En dérivant la quantité $g(r+s)$, où $r, s \in \mathbb{R}$, montrer qu'il existe $c \in \mathbb{C}$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $g'(t) = cg(t)$.
En utilisant l'application $t \longmapsto g(t)e^{-ct}$, déterminer l'ensemble des caractères dérivables de $\mathbb{R}$.

5°) En étudiant la quantité $\displaystyle\int_0^\varepsilon g(r+t)\, dt$, lorsque g est un caractère continu de $\mathbb{R}$ et $\varepsilon, r \in \mathbb{R}$, déterminer l'ensemble des caractères continus de $\mathbb{R}$.

Partie 2 : Liberté de l'ensemble des caractères

Pour toute la suite du problème, G désigne un groupe. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des caractères de G. En considérant que tout caractère de G est une application de G dans $\mathbb{C}$, $\mathcal{G}$ est une partie de $\mathbb{C}^G$, lequel est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel (on ne demande pas de le démontrer).

Cas d'un groupe commutatif

Dans cette sous-partie, on suppose que $(G, +)$ est un groupe commutatif.

6°) Soit $g \in \mathcal{G}$.

On suppose que $g = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$, où $n \in \mathbb{N}^*$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$ et où $(g_1, \ldots, g_n)$ est un n-uplet de caractères de G, que l'on suppose libre en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{C}^G$. En évaluant $g(x + y)$ de deux manières différentes, montrer qu'il existe $i \in \mathbb{N}_n$ tel que $g = g_i$.

7°) En déduire que $\mathcal{G}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$.

Cas d'un groupe fini

Dans cette sous-partie, on suppose que $(G, .)$ est un groupe fini d'ordre n, éventuellement non commutatif.

8°) Si g est un caractère de G, montrer que g est à valeurs dans $\mathbb{U}_n$, où $\mathbb{U}_n$ désigne l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité.

9°) Pour tout $g, h \in \mathcal{G}$, on pose $\langle g|h \rangle = \dfrac{1}{n} \sum_{x \in G} g(x)\overline{h(x)}$.

Soit $g, h \in \mathcal{G}$. Lorsque $g \neq h$, montrer que $\langle g|h \rangle = 0$ et lorsque $g = h$, montrer que $\langle g|h \rangle = 1$.

10°) Montrer que $\mathcal{G}$ est une partie libre de $\mathbb{C}^G$.

Partie 3 : Le groupe dual

Lorsque $(G, .)$ et $(H, .)$ sont deux groupes, on note $\mathrm{Hom}(G, H)$ l'ensemble des morphismes de G dans H.

11°) On suppose que $(H, .)$ est un groupe abélien.
Si $f, g \in \mathrm{Hom}(G, H)$, on définit l'application fg de G dans H en convenant que, pour tout $x \in G$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$.
Montrer que ceci munit $\mathrm{Hom}(G, H)$ d'une structure de groupe abélien.
En déduire que $\mathcal{G}$ est un groupe abélien.

On dit que $\mathcal{G}$ est le groupe dual de G.

12°) On suppose que m est un entier tel que $m \geq 2$. Déterminer le groupe dual de $\mathcal{S}_m$, où $\mathcal{S}_m$ désigne l'ensemble des permutations de $\mathbb{N}_m$: on pourra commencer par établir que pour toute transposition $(a\ b)$ de $\mathbb{N}_m$, il existe $\sigma \in \mathcal{S}_m$ telle que $(a\ b) = \sigma^{-1}(1\ 2)\sigma$.

13°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Lorsque g est un caractère de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pose $\varphi(g) = g(\overline{1})$.
Montrer que φ est un isomorphisme du groupe dual de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{U}_n$.

14°) Soient $G_1, \ldots, G_m$ une famille de m groupes, non nécessairement commutatifs, et soit H un groupe abélien. Montrer que $\mathrm{Hom}(G_1 \times \cdots \times G_m, H)$ est un groupe isomorphe au groupe produit $\mathrm{Hom}(G_1, H) \times \cdots \times \mathrm{Hom}(G_m, H)$.

15°) On admet que tout groupe abélien fini est isomorphe à un produit cartésien de la forme $\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/n_q\mathbb{Z}$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $n_1, \ldots, n_q \in \mathbb{N}^*$.
Montrer que si G est un groupe abélien fini, alors G et son dual sont isomorphes.

16°) Ce résultat est-il encore vrai si G est fini mais non abélien ?
Lorsque G est abélien mais infini, existe-t-il toujours un isomorphisme de G dans son groupe dual ?

17°) Soit G un groupe abélien fini. Notons $\mathcal{G}$ le groupe dual de G. Pour tout $x \in G$, on note $\begin{array}{rccc} \Psi(x) : & \mathcal{G} & \longrightarrow & \mathbb{C}^* \\ & g & \longmapsto & g(x) \end{array}$. Montrer que Ψ est un isomorphisme de G dans le dual du dual de G, que l'on appelle le bidual de G.