DM 20 : Énoncé

Ce devoir est à préparer pour le vendredi 3 février.

Problème 1 : Décomposition d'un anneau

Dans ce problème, tous les anneaux considérés sont **commutatifs et différents de l'anneau nul** : le mot *anneau* signifie donc *anneau commutatif non nul.*

Si A est un anneau et si x est un élément de A,

— on dit que x est nilpotent si et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0$;

— on dit que x est idempotent si et seulement si $x^2 = x$.

Partie I : Anneaux décomposables

1°) Lorsque A est un corps, quels sont ses éléments nilpotents et quels sont ses éléments idempotents ?

2°) Quels sont les éléments nilpotents et quels sont ses éléments idempotents de $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$?

3°) Soit B et C deux anneaux et soit $(x, y) \in B \times C$.
Montrer que (x, y) est idempotent dans l'anneau produit $B \times C$ si et seulement si x est idempotent dans B et y est idempotent dans C.
En déduire que $B \times C$ possède au moins 4 éléments idempotents distincts.

4°) Soit A un anneau et e un élément idempotent et non nul de A.
On note $Ae = \{ae/a \in A\}$. Montrer que Ae est un anneau, pour les restrictions à Ae des lois de A, mais avec e comme élément neutre.

5°) Soit A un anneau et e un élément idempotent de A, différent de 0 et de 1.
Montrer que $1 - e$ est idempotent et que $e(1 - e) = 0$.
Montrer que l'application $\varphi\ :\ A \longrightarrow [Ae] \times [A(1-e)]$ définie par $\varphi(x) = (xe, x(1-e))$ est un isomorphisme d'anneaux.

6°) On dit qu'un anneau est indécomposable si et seulement si il n'est pas isomorphe au produit cartésien de deux anneaux.
Montrer qu'un anneau est indécomposable si et seulement si ses seuls éléments idempotents sont 0 et 1.

7°) Montrer qu'un anneau qui possède un nombre fini d'éléments idempotents est isomorphe au produit cartésien d'un nombre fini d'anneaux indécomposables.
En déduire que le nombre d'éléments idempotents d'un tel anneau est de la forme 2^n.

Partie II : anneaux locaux

Si A est un anneau, on notera $U(A)$ l'ensemble de ses éléments inversibles.
On dit que A est un anneau local si et seulement si $A \setminus U(A)$ est un idéal de A.

8°) Montrer qu'un corps est toujours un anneau local.

9°) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et p premier, $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ est un anneau local.

10°) Montrer que tout anneau local est indécomposable.
Quels sont les entiers $n \in \mathbb{N}$, avec $n \geq 2$, tels que $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un anneau local ?

11°) Montrer qu'un anneau A est local si et seulement si pour tout $x \in A$, x ou $1-x$ est inversible.

Partie III : cas des anneaux finis

Dans toute cette partie, on suppose que A est un anneau de cardinal fini.

12°) Montrer que pour tout $x \in A$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que x^n est idempotent.
En déduire que, si A est indécomposable, alors tout élément de A est soit inversible, soit nilpotent.

13°) Montrer que A est local si et seulement si A est indécomposable.
Cette propriété est-elle encore vraie avec des anneaux de cardinal infini ?

14°) Montrer que A est isomorphe à un produit cartésien de corps si et seulement si A ne possède aucun élément nilpotent non nul.

15°) Pour quels entiers n, avec $n \geq 2$, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est-il isomorphe à un produit cartésien de corps ?

Problème 2 : nombre d'enroulements de Poincaré

Lorsque f est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, on dit que c'est un homéomorphisme sur $\mathbb{R}$ si et seulement si f est bijective et continue. On note Hom l'ensemble des homéomorphismes sur $\mathbb{R}$.
Lorsque $f \in \text{Hom}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on notera $f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}$, et on conviendra que $f^0 = Id_{\mathbb{R}}$.

Partie I : groupe d'enroulement de Poincaré

On note $H = \{f \in \text{Hom} \ / \ \forall x \in \mathbb{R}, \ \ f(x+1) = f(x) + 1\}$.

1°) Montrer que $f \in H$ si et seulement si $f \in \text{Hom}$ et si $f - Id_{\mathbb{R}}$ est une application périodique de période 1.

2°) Montrer que Hom et H sont des groupes.

3°) Soit $f \in H$. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{R}$, $f(x+m) = f(x) + m$.
Montrer que f est strictement croissante.

4°) Vérifier que $x \longmapsto x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$ est un élément de H.
Parmi les applications affines, c'est-à-dire de la forme $x \longmapsto ax + b$, où $a, b \in \mathbb{R}$, lesquelles sont dans H ?

Partie II : nombre d'enroulements de Poincaré

Dans cette partie, on fixe $f \in H$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $u_n = \dfrac{1}{n}(f^n - Id_{\mathbb{R}})$.

5°) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $x, y \in \mathbb{R}$.
Lorsque $x \leq y < x + 1$, montrer que $|u_n(y) - u_n(x)| \leq \dfrac{1}{n}$.
Lorsque x et y sont quelconques dans $\mathbb{R}$, montrer que cette inégalité est encore valable.

6°) Pour tout $n, m \in \mathbb{N}^*$, montrer que $u_{nm}(0) = \dfrac{1}{m}\displaystyle\sum_{k=0}^{m-1} u_n(f^{kn}(0))$, puis en déduire que $|u_{nm}(0) - u_n(0)| \leq \dfrac{1}{n}$.
Montrer que $(u_n(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy de réels, c'est-à-dire que

$$\forall \varepsilon > 0, \ \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \ \forall p, q \in [\![N, +\infty[\![, \ \ |u_p(0) - u_q(0| \leq \varepsilon.$$

Nous verrons plus tard, et nous admettrons pour le moment, que toute suite de Cauchy de réels est convergente.

7°) On note $\rho(f)$ la limite de la suite $(u_n(0))_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, montrer que $\dfrac{f^n(x)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$.
Le réel $\rho(f)$ est appelé le nombre d'enroulements de f.

Partie III : Propriété du nombre d'enroulements

La partie II définit donc une application $\rho \ : \ H \longrightarrow \mathbb{R}$.

8°) Montrer que ρ est surjectif.

9°) Soit $f \in H$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > x$.
Montrer qu'il existe $m > 0$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq x + m$.
En déduire que $\rho(f) > 0$.
Si au contraire, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) < x$, montrer que $\rho(f) < 0$.

10°) Pour tout $f \in H$, montrer que $\rho(f) = 0$ si et seulement si f possède un point fixe, c'est-à-dire si et seulement si il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) = a$.
Donner la valeur de $\rho(h)$, lorsque h est l'application $x \longmapsto x + \frac{1}{2\pi}\sin(2\pi x)$.

11°) Soit $f \in H$. Montrer que $\rho(f) \in \mathbb{Q}$ si et seulement si il existe $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $f^q(a) = a + p$. *Indication :* pour le sens direct, on pourra utiliser la fonction $g \ : \ x \longmapsto f^q(x) - p$.

Partie IV : Invariance par conjugaison

12°) Soit $\varphi \in H$. Pour tout $r \in \mathbb{R}$, montrer que $\dfrac{\varphi(nr)}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$.

Jusqu'à la fin de ce problème, on fixe deux éléments f et g dans H.
On suppose qu'il existe $\varphi \in H$ tel que $g = \varphi^{-1} \circ f \circ \varphi$: on dit que f et g sont conjugués dans le groupe H.

13°) Montrer que $\dfrac{\varphi(g^n(x))}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$.

14°) Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière inférieure de t.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que
$$\frac{\varphi(g^n(x))}{n} - \frac{\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor + 1}{n} \leq \frac{\varphi(n\rho(g))}{n} \leq \frac{\varphi(g^n(x))}{n} - \frac{\lfloor g^n(x) - n\rho(g) \rfloor}{n}.$$
En déduire que $\dfrac{\varphi(n\rho(g))}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \rho(f)$, puis que $\rho(f) = \rho(g)$.

15°) Réciproquement, si $\rho(f) = \rho(g)$, f et g sont-elles toujours conjuguées dans H ?