DM 22 : énoncé
Décomposition des noyaux

Partie I : polynômes d'endomorphismes

1°) On note $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ l'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Rappeler sans démonstration quelles sont les opérations (addition, multiplication interne, multiplication d'un réel par une application) qui donnent à $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ une structure d'algèbre.

On désigne par $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels, c'est-à-dire l'ensemble des applications de la forme $\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n \end{array}$, où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels, supposée presque nulle afin de garantir que la somme $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est une somme finie. Ce polynôme sera noté $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n X^n$. On admet que si $P = \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses coefficients dépend uniquement de P.

2°) Montrer que $\mathbb{R}[X]$ est une sous-algèbre de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

Pour toute la suite de ce problème, E désigne un espace vectoriel de dimension infinie sur le corps $\mathbb{R}$ des nombres réels.
On note $L(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
On note Id l'endomorphisme unité de E, qui à tout élément x de E associe $\mathrm{Id}(x) = x$.
Lorsque $u \in L(E)$, on note $\mathrm{Ker}(u)$ le noyau de u, et, pour tout sous-espace vectoriel F de E, on note $u(F)$ l'image de F par u.
De plus, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'endomorphisme u^k de E par les relations suivantes : $u^0 = \mathrm{Id}$ et $u^{k+1} = u \circ u^k$.
Lorsque $Q(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$, on note $Q(u)$ l'endomorphisme $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k u^k$ de E.

3°) Soit $u \in L(E)$. Notons φ l'application allant de $\mathbb{R}[X]$ dans $L(E)$ définie par :
pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$, $\varphi(Q) = Q(u)$.
Montrer que φ est une application linéaire.
Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}[X]$ et tout $p \in \mathbb{N}$, $\varphi(X^p) \circ \varphi(Q) = \varphi(X^p Q)$.

En déduire que φ est un morphisme d'algèbres.

On dit que deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ sont premiers entre eux (ou bien que P est premier avec Q) si et seulement si il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $AP + BQ = 1$.

4°) Si P, Q et R sont trois polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que P et Q sont premiers avec R, montrer que PQ est premier avec R.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $P_1, \ldots, P_n$ sont n polynômes, tous premiers avec un même polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$, montrer que $\prod_{i=1}^{n} P_i$ est premier avec Q.

Partie II : décomposition des noyaux

5°)
a) Soit F, G et H trois sous-espaces vectoriels de E. On suppose que $F + G$ est une somme directe. On pose $K = F \oplus G$ et on suppose que $K + H$ est une somme directe. Montrer que $F + G + H$ est une somme directe et que $(F \oplus G) \oplus H = F \oplus G \oplus H$.
b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit G un sous-espace vectoriel de E. Si $F_1, \ldots, F_n$ sont n sous-espaces vectoriels de E dont la somme est directe, et si en posant $K = \bigoplus_{i=1}^{n} F_i$, $K + G$ est en somme directe, montrer que $F_1 + \cdots + F_n + G$ est une somme directe et que $(F_1 \oplus \cdots \oplus F_n) \oplus G = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \oplus G$.

6°) Soit $u \in L(E)$. Soient P et Q deux polynômes à coefficients réels.
Montrer que $\mathrm{Ker}(P(u)) + \mathrm{Ker}(Q(u)) \subset \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$.

7°) On suppose de plus P et Q sont premiers entre eux.
Montrer que $\mathrm{Ker}(P(u)) \oplus \mathrm{Ker}(Q(u)) = \mathrm{Ker}[(PQ)(u)]$.

8°) Soit $u \in L(E)$. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et soit $P_1, \ldots, P_n$ n polynômes de $\mathbb{R}[X]$ deux à deux premiers entre eux.
Montrer que $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathrm{Ker}(P_i(u)) = \mathrm{Ker}\Big(\Big[\prod_{i=1}^{n} P_i\Big](u)\Big)$.

9°) Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie.

Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et soit $F_1, \ldots, F_p$ p sous-espaces vectoriels de F tels que $F = \bigoplus_{i=1}^{p} F_i$.

Pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$, notons $p_i = \dim(F_i)$ et $b_i = (e_{i,1}, \ldots, e_{i,p_i})$ une base de F_i.
On note $b = (e_{i,j})_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq p_i}}$: b est la "réunion" des bases b_i des sous-espaces vectoriels F_i.

Montrer que b est une base de F. En déduire que $\dim(F) = \sum_{i=1}^{p} \dim(F_i)$.

Partie III : applications

10°) On considère l'équation différentielle (E) : $y''' = 2y'' + y' - 2y$, où l'inconnue y est une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

a) Montrer que les solutions de (E) sont de classe C^∞.

b) Montrer que y est solution de (E) si et seulement si $y \in \mathrm{Ker}(P(D))$, où P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ à préciser et où D est un endomorphisme à préciser sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel à préciser.

c) Résoudre cette équation différentielle.

11°) Déterminer l'ensemble des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels satisfaisant la relation de récurrence suivante : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - 2u_n$.

Partie IV : une décomposition plus fine

On suppose que v un endomorphisme surjectif de E.

12°) On suppose que S est un sous-espace vectoriel de E tel que $S \oplus \mathrm{Ker}(v) = E$.
Montrer que la restriction de v à S est un isomorphisme entre S et E.
En déduire qu'il existe un endomorphisme injectif w de E tel que $v \circ w = \mathrm{Id}$.

13°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$, $w^i(\mathrm{Ker}(v)) \subset \mathrm{Ker}(v^k)$.

14°) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour tout $x \in E$ et pour tout $i \in \{0, \ldots, k-1\}$,
$w^i \circ v^i(x) - w^{i+1} \circ v^{i+1}(x) \in w^i(\mathrm{Ker}(v))$.

En déduire que $\mathrm{Ker}(v^k) = \displaystyle\bigoplus_{i=0}^{k-1} w^i(\mathrm{Ker}(v))$.

15°) On suppose dans cette question que $\mathrm{Ker}(v)$ est de dimension finie et
on note $s = \dim(\mathrm{Ker}(v))$. Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker}(v^k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Soit $r_1, \ldots, r_p$ des nombres réels deux à deux distincts et $n_1, \ldots, n_p$ des nombres entiers strictement positifs. On pose $P(X) = \displaystyle\prod_{q=1}^{p}(X-r_q)^{n_q} = (X-r_1)^{n_1}(X-r_2)^{n_2}\cdots(X-r_p)^{n_p}$.
On suppose que pour tout $q \in \{1, \ldots, p\}$, l'endomorphisme $u - r_q\mathrm{Id}$ est surjectif.
Ainsi, pour tout $q \in \{1, \ldots, p\}$, il existe un endomorphisme injectif w_q de E tel que $(u - r_q\mathrm{Id}) \circ w_q = \mathrm{Id}$.

16°) Déterminer $\mathrm{Ker}(P(u))$ en fonction des sous-espaces $w_q^k(\mathrm{Ker}(u - r_q\mathrm{Id}))$, où
$k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq q \leq p$.
Calculer la dimension de $\mathrm{Ker}(P(u))$ lorsque $\mathrm{Ker}(u - r_q\mathrm{Id})$ est de dimension finie s_q pour tout $q \in \{1, \ldots, p\}$.