

DS 10

Partie I

E désigne un \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension finie. On pose $c(E) = E \times E$.

Pour tout $(x, y) \in c(E)$, $(x', y') \in c(E)$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on note :

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y') \text{ et } (\alpha + i\beta).(x, y) = (\alpha x - \beta y, \beta x + \alpha y).$$

1°) Montrer que $(c(E), +, \cdot)$ est un espace vectoriel sur le corps \mathbb{C} .

Montrer que $(c(E), +, \cdot)$ est aussi un \mathbb{R} -espace vectoriel.

2°) a) On note $E' = \{(x, 0) / x \in E\}$.

Vérifier que E' est un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel du \mathbb{R} -espace vectoriel $c(E)$.

Montrer que l'application $x \mapsto (x, 0)$ est un \mathbb{R} -isomorphisme de E sur E' .

Pour la suite de ce problème, lorsque $x \in E$, on identifie x avec $(x, 0)$, c'est-à-dire que l'on convient que, pour tout $x \in E$, $(x, 0) = x$. Ainsi, $E = E' \subset c(E)$.

2°) b) Soit $z \in c(E)$. Montrer qu'il existe un unique $(x, y) \in E^2$ tel que $z = x + iy$.

On notera $x = R(z)$ et $y = I(z)$.

Montrer que $R(-iz) = I(z)$.

Lorsque $z = x + iy$ avec $x, y \in E$, on note $\bar{z} = x - iy$.

Si V est une partie de $c(E)$, on note $\bar{V} = \{\bar{u} / u \in V\}$.

3°) a) Soit V une partie de $c(E)$ et soit $z \in c(E)$.

Montrer que $z \in \bar{V}$ si et seulement si $\bar{z} \in V$.

3°) b) Soit F un sous- \mathbb{R} -espace vectoriel de $c(E)$. Montrer que F est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $c(E)$ si et seulement si, pour tout $z \in F$, $iz \in F$.

3°) c) Si F est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $c(E)$, montrer que \bar{F} est aussi un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $c(E)$.

4°) a) Montrer que $c(E)$ est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension finie.

4°) b) Si F est un sous- \mathbb{C} -espace vectoriel de $c(E)$, montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(F) = 2\dim_{\mathbb{C}}(F)$, où $\dim_{\mathbb{R}}(F)$ désigne la dimension de F en tant que \mathbb{R} -espace vectoriel et où $\dim_{\mathbb{C}}(F)$ désigne la dimension de F en tant que \mathbb{C} -espace vectoriel.

5°) Soit u un \mathbb{R} -endomorphisme de E . Montrer qu'il existe un unique \mathbb{C} -endomorphisme u' sur $c(E)$ qui prolonge u , c'est-à-dire tel que, pour tout $x \in E$, $u'(x) = u(x)$.

Pour la suite du problème et sauf indication du contraire, le corps de référence est \mathbb{C} pour les sous-espaces vectoriels de $c(E)$ et pour les endomorphismes de $c(E)$. Bien sûr, le corps de référence est \mathbb{R} pour les sous-espaces vectoriels de E et pour les endomorphismes de E .

Partie II

Dans toute cette partie, Σ désigne un sous-espace vectoriel de $c(E)$.

6°) a) On note $R(\Sigma) = \{R(z)/z \in \Sigma\}$ et $I(\Sigma) = \{I(z)/z \in \Sigma\}$.

Montrer que $R(\Sigma)$ est un sous-espace vectoriel de E et que $R(\Sigma) = I(\Sigma)$.

6°) b) Lorsque H est un sous-espace vectoriel de E , montrer que $R(c(H)) = H$.

7°) a) Montrer que $\Sigma \cap E$ est un sous-espace vectoriel de E .

Montrer que $\Sigma \cap \bar{\Sigma} = c(\Sigma \cap E)$.

7°) b) Montrer que $\Sigma + \bar{\Sigma} = c(R(\Sigma))$.

7°) c) Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E tel que $\Sigma = c(H)$ si et seulement si $\Sigma = \bar{\Sigma}$.

8°) a) Montrer que $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma) - \dim_{\mathbb{C}}(\Sigma \cap \bar{\Sigma})$.

Pour toute la suite du problème, on dira que Σ est irréel si et seulement si $\Sigma \cap E = \{0\}$.

8°) b) Montrer que Σ est irréel si et seulement si $\dim_{\mathbb{R}}(R(\Sigma)) = 2\dim_{\mathbb{C}}(\Sigma)$.

9°) a) Montrer que Σ est irréel si et seulement si l'application $z \mapsto R(z)$ est une injection de Σ dans $R(\Sigma)$.

Montrer que Σ est irréel si et seulement si l'application $z \mapsto I(z)$ est une injection de Σ dans $R(\Sigma)$.

9°) b) Soit $q \in \mathbb{N}^*$. Soit (z_1, \dots, z_q) une famille de q vecteurs de $c(E)$.

Montrer que (z_1, \dots, z_q) est une base d'un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$ si et seulement si les $2q$ vecteurs $R(z_1), \dots, R(z_q), I(z_1), \dots, I(z_q)$ forment une famille libre de E .

9°) c) Soit H un sous-espace vectoriel de E de dimension paire et soit σ un automorphisme de H tel que $\sigma \circ \sigma = -Id_H$. On pose $S = \{x + i\sigma(x)/x \in H\}$.

Montrer que S est un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$ tel que $R(S) = H$.

9°) d) Soit S un sous-espace vectoriel irréel de $c(E)$. Montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel H de E de dimension paire et un automorphisme σ de H vérifiant $\sigma \circ \sigma = -Id_H$, tels que $S = \{x + i\sigma(x) / x \in H\}$.

Pour la fin de cette partie, on fixe un sous-espace vectoriel de E , noté H et on suppose qu'il existe un automorphisme σ de H tel que $\sigma \circ \sigma = -Id_H$.

10°) a) A l'aide de la notion de déterminant, montrer que $\dim(H)$ est paire.

10°) b) Montrer qu'il existe une base de H dans laquelle la matrice de σ est égale à la matrice blocs $\begin{pmatrix} 0 & -I_p \\ I_p & 0 \end{pmatrix}$, où $2p = \dim(H)$.

Partie III

On rappelle que, cf question 5, si u est un endomorphisme de E , on a noté u' son unique prolongement en un endomorphisme de $c(E)$.

11°) Soit φ un \mathbb{C} -endomorphisme de $c(E)$. Montrer qu'il existe un unique couple (u, v) d'endomorphismes de E tel que $\varphi = u' + iv'$.

On note \mathcal{L} l'ensemble des \mathbb{C} -endomorphismes φ de $c(E)$ tels que $\varphi(E)$ est un \mathbb{C} -sous-espace vectoriel de $c(E)$.

12°) a) Soit φ un \mathbb{C} -endomorphisme de $c(E)$.

Montrer que les 4 propriétés suivantes sont équivalentes :

- i) $\varphi \in \mathcal{L}$.
- ii) $\varphi(E) = (i\varphi)(E)$.
- iii) $\varphi(E) = \varphi(c(E))$.
- iv) $R(\text{Ker}(\varphi)) = E$.

12°) b) Soit $\varphi \in \mathcal{L}$. Ecrivons $\varphi = u' + iv'$, où u et v sont deux endomorphismes de E . Montrer que $2\text{rg}_{\mathbb{C}}(\varphi) = \dim(E) - \dim(\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v))$.

On note \mathcal{L}_0 l'ensemble des $\varphi \in \mathcal{L}$ tel que $\text{Ker}(\varphi)$ est irréel.

13°) a) Montrer que si E est de dimension impaire, alors $\mathcal{L}_0 = \emptyset$.

Pour la suite du problème, on suppose que E est de dimension paire.

13°) b) Montrer que si $\varphi = u' + iv' \in \mathcal{L}_0$, alors

$\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$ et il existe un endomorphisme σ de E tel que $\sigma \circ \sigma = -Id_E$, $u = v \circ \sigma$ et $v = -u \circ \sigma$.

13°) c) Soit u et v deux endomorphismes de E tels que $\text{Ker}(u) \cap \text{Ker}(v) = \{0\}$.

Montrer que s'il existe un endomorphisme τ de E tel que $u = v \circ \tau$ et $v = -u \circ \tau$, alors $u' + iv' \in \mathcal{L}_0$, τ est unique et $\tau \circ \tau = -Id_E$.