DS 9 :
L'opérateur de dérivation discrète de polynômes.

Les calculatrices sont interdites.

On fixe un entier $n \in \mathbb{N}$.
On note $\mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n.

Partie 1 : Nombres de Stirling

1°) Soit $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_n[X]$ telle que, pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(P_i) = i$. Montrer que $(P_i)_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on pose $E_i = \dfrac{1}{i!} \displaystyle\prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$ et $F_i = \displaystyle\prod_{k=0}^{i-1} (X - k)$.
On pose $\mathcal{E}_n = (E_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $\mathcal{F}_n = (F_i)_{0 \leq i \leq n}$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on note $\Delta(P) = P(X+1) - P(X)$.
Δ est l'opérateur de dérivation discrète.
On note Δ_n la restriction de Δ à $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) Montrer que $\mathcal{E}_n$ et $\mathcal{F}_n$ sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.
Montrer que Δ et Δ_n sont des endomorphismes d'espaces vectoriels.
Déterminer la matrice A_n de Δ_n dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.

3°) Déterminer la matrice B_n de Δ_n dans la base $\mathcal{E}_n$.
Montrer que Δ_n est nilpotent et déterminer son indice de nilpotence, c'est-à-dire le plus petit $m \in \mathbb{N}$ tel que $\Delta_n^m = 0$.

On définit les familles de réels $(s(i,k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ et $(\sigma(i,k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ par les conditions

$$F_k = \sum_{i=0}^{k} s(i,k) X^i \text{ et } X^k = \sum_{i=0}^{k} \sigma(i,k) F_i.$$

Les nombres $s(i,k)$ (resp : $\sigma(i,k)$) sont appelés les nombres de Stirling de première espèce (resp : de seconde espèce).

4°) Montrer que ces nombres sont correctement définis.
Soit $i, k \in \mathbb{N}$ tels que $1 \leq i \leq k \leq n - 1$.

Montrer que $s(i,k+1) = s(i-1,k) - ks(i,k)$ et que $\sigma(i,k+1) = \sigma(i-1,k) + i\sigma(i,k)$.

5°) Soit $i, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq k \leq n$. Montrer que $\sigma(i,k)$ est égal au nombre de partitions en i parties non vides d'un ensemble de cardinal k. Plus précisément, lorsque E est un ensemble de cardinal k, il s'agit de montrer que $\sigma(i,k)$ est le cardinal de l'ensemble des $\{A_1, \dots, A_i\}$ tels que

— $\forall j \in \{1, \dots, i\},\ A_j \subset E$;
— $\forall j \in \{1, \dots, i\},\ A_j \neq \emptyset$;
— Pour tout $j, h \in \{1, \dots, i\}$, $j \neq h \Longrightarrow A_j \cap A_h = \emptyset$;
— $E = \bigcup\limits_{1 \leq j \leq i} A_j$.

Partie 2 : Sommation à l'aide de Δ

6°) Soit u une application linéaire entre 2 espaces vectoriels E et F.
On suppose que H est un sous-espace vectoriel de E tel que $E = H \oplus \mathrm{Ker}(u)$.
Montrer que $u|_H^{\mathrm{Im}(u)}$ est un isomorphisme.

7°) Déterminer $\mathrm{Ker}(\Delta_n)$ et $\mathrm{Im}(\Delta_n)$.
Lorsque $n \geq 1$, montrer que Δ_n réalise un isomorphisme
de $V = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \ / \ P(0) = 0\}$ dans $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

8°) On suppose pour cette question que $n = 5$.
Calculer un polynôme $P \in V$ tel que $\Delta(P) = X^4$.

9°) Déterminer trois réels a, b, c tels que, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i=1}^{m} i^4 = (am^2 + bm + c)\frac{m(m+1)(2m+1)}{30}.$$

Partie 3 : Bases duales

Lorsque E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel , on note E^* l'ensemble des formes linéaires, c'est-à-dire l'ensemble des applications linéaires de E dans $\mathbb{R}$.

10°) On suppose dans cette question que E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.
Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E et soit $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ une famille de n vecteurs de E^*. On suppose que, pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$ (c'est-à-dire 0 lorsque $i \neq j$ et 1 lorsque $i = j$).
Montrer que e est une base de E et que φ est une base de E^*.

11°) On suppose que $e = (e_1, \dots, e_n)$ est une base d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E de dimension n. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et pour tout $x \in E$, on note $e_i^*(x)$ la i-ème coordonnée de x dans la base e.
On note e^* la famille $(e_1^*, \dots, e_n^*)$. Montrer que c'est une base de E^*.
On dit que e^* est la base duale de la base e.

12°) On suppose que $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$ est une base de E^*, où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n. Montrer qu'il existe une unique base $e = (e_1, \dots, e_n)$ de E telle que sa base duale e^* est égale à φ (on pourra considérer l'application u de E dans $\mathbb{R}^n$ définie par $u(x) = (\varphi_i(x))_{1 \le i \le n}$). On dit alors que e est la base préduale de φ.

Montrer que pour tout $x \in E$ et $f \in E^*$, on a $x = \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x) e_i$ et $f = \sum_{i=1}^{n} f(e_i)\varphi_i$.

13°) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Montrer que $((X-\alpha)^k)_{0 \le k \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et déterminer sa base duale.

14°) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note f_x l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_x(P) = P(x).$$

On suppose que $(x_0, \dots, x_n)$ est une famille de $n+1$ réels deux à deux distincts.
Montrer que $(f_{x_i})_{0 \le i \le n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$ et déterminer sa base préduale.

15°) En évaluant $\Delta_n^j(E_i)$ pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, déterminer la base duale de $\mathcal{E}_n$.

16°) Soit $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.
On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que, pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$, $Q(\alpha + h) \in \mathbb{Z}$.
Montrer que pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $Q(m) \in \mathbb{Z}$.

Partie 4 : Relation entre dérivée et dérivée discrète

17°) Démontrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^x = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!}$, par exemple à l'aide de la formule de Taylor avec reste intégral.

Démontrer que, pour tout $x \in [0,1]$, $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$.

On note I l'opérateur identité sur $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $I(P) = P$.
On note D l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$. Ainsi, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $D(P) = P'$.
Par analogie avec les relations de la question précédente, on définit deux applications de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathbb{R}[X]$, notées e^D et $\ln(\Delta + I)$ en convenant que,

$$\text{pour tout } P \in \mathbb{R}[X], \quad [e^D](P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}(P) \text{ et } [\ln(\Delta + I)](P) = \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k(P)}{k}.$$

18°) Montrer que $e^D = \Delta + I$ et que $\ln(\Delta + I) = D$.