

DS 9 : Corrigé

Le barème comporte un total de 76 points.

Partie 1 : Nombres de Stirling (sur 22 points)

1°) (sur 2 points) Notons $B = (P_i)_{0 \leq i \leq n}$. Supposons que B n'est pas libre. Alors il existe une famille $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n}$ non nulle de réels telle que $\sum_{i=0}^n \alpha_i P_i = 0$.

L'ensemble $\{i \in \{0, \dots, n\} / \alpha_i \neq 0\}$ est une partie non vide majorée de \mathbb{N} , donc elle possède un maximum que l'on notera m . Alors $\sum_{i=0}^m \alpha_i P_i = 0$ et $\alpha_m \neq 0$, donc

$P_m = -\frac{1}{\alpha_m} \sum_{i=0}^{m-1} \alpha_i P_i$. On en déduit que $m = \deg(P_m) \leq \max_{0 \leq i \leq m-1} \deg(\alpha_i P_i) \leq m-1$ (même si $m=0$), donc $m \leq m-1$, ce qui est faux. Ainsi B est libre, or son cardinal est égal à $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X])$, d'après le cours, donc B est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2°) (sur 3 points) \diamond Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $\deg(E_i) = i = \deg(F_i)$, donc d'après la question précédente, \mathcal{E}_n et \mathcal{F}_n sont des bases de $\mathbb{R}_n[X]$.

\diamond Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors

$$\begin{aligned} \Delta(\alpha P + Q) &= (\alpha P + Q)(X+1) - (\alpha P + Q)(X) \\ &= \alpha(P(X+1) - P) + (Q(X+1) - Q) \\ &= \alpha \Delta(P) + \Delta(Q). \end{aligned}$$

Ainsi, Δ est une application linéaire de $\mathbb{R}[X]$ dans lui-même, c'est-à-dire un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

\diamond Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. $\deg(X+1) = 1$, donc d'après le cours, le degré du polynôme composé $P(X+1)$ est égal à $\deg(P) + \deg(X+1) = \deg(P) + 1$. Alors $\deg(\Delta(P)) \leq \max(\deg(P(X+1)), \deg(P)) \leq \deg(P) + 1 \leq n+1$, donc $\Delta(P) \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$.

Ainsi Δ_n est une application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans lui-même. Elle est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire. C'est donc un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

\diamond Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. D'après la formule du binôme de Newton,

$$\Delta_n(X^j) = (X+1)^j - X^j = \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} X^i.$$

Convenons par commodité de numéroter les lignes et colonnes de A_n de 0 à n .

Pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, le (i, j) -ème coefficient de A_n vaut donc $a_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \geq j \\ \binom{j}{i} & \text{si } i < j \end{cases}$.

A_n est donc une matrice triangulaire supérieure stricte (c'est-à-dire dont la diagonale est nulle).

3° \diamond (sur 3 points) Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Lorsque $j = 0$, $E_0 = 1$, donc $\Delta_n(E_0) = 0$. Supposons maintenant que $j \in \mathbb{N}_n$.

$$\begin{aligned} \Delta_n(E_j) &= E_j(X+1) - E_j(X) = \frac{1}{j!} \left[\prod_{k=0}^{j-1} (X+1-k) - \prod_{k=0}^{j-1} (X-k) \right] \\ &= \frac{1}{j!} \left[\prod_{k=-1}^{j-2} (X-k) - \prod_{k=0}^{j-1} (X-k) \right] \\ &= \frac{1}{j!} \left[\prod_{k=0}^{j-2} (X-k) \right] ((X+1) - (X-j+1)) \\ &= E_{j-1}. \end{aligned}$$

On en déduit que $B_n = \text{mat}(\Delta_n, \mathcal{E}_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

\diamond (sur 2 points) Convenons que $E_j = 0$ pour tout $j \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$.

Soit $k \in \mathbb{N}$. Notons $R(k)$ l'assertion : $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $\Delta_n^k(E_j) = E_{j-k}$.

Lorsque $k = 0$, $D_n^0 = Id_{\mathbb{R}_n[X]}$, donc $R(0)$ est vraie.

Lorsque $k = 1$, le point précédent établit $R(1)$.

Supposons que $k \in \mathbb{N}^*$ et que $R(k)$ est vraie.

Soit $j \in \{0, \dots, n\}$. Alors $\Delta_n^{k+1}(E_j) = \Delta_n^k(\Delta(E_j)) = \Delta_n^k(E_{j-k}) = E_{j-k-1}$ d'après $R(1)$. Ceci démontre $R(k+1)$, donc d'après le principe de récurrence, on a montré que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\forall j \in \{0, \dots, n\}$, $\Delta_n^k(E_j) = E_{j-k}$.

En particulier, $\Delta_n^n(E_n) = E_0 = 1 \neq 0$, donc $\Delta_n^n \neq 0$ et, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $\Delta_n^{n+1}(E_j) = 0$, donc $\Delta_n^{n+1} = 0$. Ainsi, Δ_n est nilpotent, d'indice $n+1$.

4° \diamond (sur 1 point) Soit $i, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq i \leq k \leq n$.

$\deg(F_k) = k$, donc il existe bien une unique famille de réels $(s(i, k))_{0 \leq i \leq k}$ telle que

$$F_k = \sum_{i=0}^k s(i, k) X^i. \text{ De même, on a montré que } (F_i)_{0 \leq i \leq k} \text{ est une base de } \mathbb{R}_k[X], \text{ donc}$$

il existe une unique famille de réels $(\sigma(i, k))_{0 \leq i \leq k}$ telle que $X^k = \sum_{i=0}^k \sigma(i, k) F_i$.

Ainsi, les familles de réels $(s(i, k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ et $(\sigma(i, k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ sont correctement définies par l'énoncé.

\diamond (sur 2 points) $\sum_{j=0}^{k+1} s(j, k+1) X^j = F_{k+1} = (X-k)F_k = (X-k) \sum_{j=0}^k s(j, k) X^j$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} s(j, k+1)X^j &= \sum_{j=1}^{k+1} s(j-1, k)X^j - k \sum_{j=0}^k s(j, k)X^j \\
&= \sum_{j=1}^k [s(j-1, k) - ks(j, k)]X^j + s(k, k)X^{k+1} - ks(0, k).
\end{aligned}$$

En égalant les coefficients de degré i , ceci démontre que $s(i, k+1) = s(i-1, k) - ks(i, k)$.

$$\diamond \quad (\text{sur 3 points}) \quad \sum_{j=0}^{k+1} \sigma(j, k+1)F_j = X^{k+1} = XX^k = \sum_{j=0}^k \sigma(j, k)XF_j. \text{ or pour tout}$$

$j \in \{0, \dots, k\}$, $XF_j = (X - j + j)F_j = F_{j+1} + jF_j$, donc

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{k+1} \sigma(j, k+1)F_j &= \sum_{j=1}^{k+1} \sigma(j-1, k)F_j + \sum_{j=0}^k \sigma(j, k)jF_j \\
&= \sum_{j=1}^k [\sigma(j-1, k) + j\sigma(j, k)]F_j + \sigma(k, k)F_{k+1}.
\end{aligned}$$

La famille $(F_j)_{0 \leq j \leq k+1}$ étant libre, ceci démontre que $\sigma(i, k+1) = \sigma(i-1, k) + i\sigma(i, k)$.

5°) (sur 6 points) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et pour tout ensemble E , notons $\mathcal{P}_i(E)$ l'ensemble des partitions en i parties non vides de l'ensemble E .

Soit E un ensemble fini non vide. Il admet au moins un élément que nous noterons e . Soit $i \in \mathbb{N}^*$. Alors $\mathcal{P}_i(E) = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B}$, où \mathcal{A} est l'ensemble des partitions de E en i parties non vides dont l'une des parties est le singleton $\{e\}$ et où \mathcal{B} est le complémentaire de \mathcal{A} dans $\mathcal{P}_i(E)$.

L'application $\{A_1, \dots, A_{i-1}\} \mapsto \{A_1, \dots, A_{i-1}, \{e\}\}$ est une bijection de $\mathcal{P}_{i-1}(E \setminus \{e\})$ dans \mathcal{A} , donc $|\mathcal{A}| = |\mathcal{P}_{i-1}(E \setminus \{e\})|$.

De plus, si $\{A_1, \dots, A_i\} \in \mathcal{P}_i(E \setminus \{e\})$, alors, pour tout $j \in \mathbb{N}_i$, en remplaçant A_j par $A_j \cup \{e\}$, on obtient un élément de \mathcal{B} . Ainsi, pour construire un élément de \mathcal{B} , on part d'un élément $\{A_1, \dots, A_i\}$ de $\mathcal{P}_i(E \setminus \{e\})$ et on choisit l'indice j de l'ensemble A_j auquel on ajoutera e . On en déduit que (1) : $|\mathcal{B}| = i|\mathcal{P}_i(E \setminus \{e\})|$, puis que $|\mathcal{P}_i(E)| = |\mathcal{P}_{i-1}(E \setminus \{e\})| + i|\mathcal{P}_i(E \setminus \{e\})|$.

De plus, il est clair que $|\mathcal{P}_0(E)| = 0$ lorsque E est non vide et que $|\mathcal{P}_i(\emptyset)| = 0$ lorsque $i \geq 1$. On a aussi $|\mathcal{P}_0(\emptyset)| = 1$, car l'ensemble vide est l'unique partition de \emptyset en des parties non vides. Ceci permet déjà de montrer par récurrence sur le cardinal de E que, pour tout ensemble fini E et pour tout $i \in \mathbb{N}$, $|\mathcal{P}_i(E)|$ ne dépend que de i et du cardinal de E . On peut donc poser $p(i, k) = |\mathcal{P}_i(E)|$, où E est un ensemble quelconque de cardinal k . Alors la relation (1) devient : $p(i, k+1) = p(i-1, k) + ip(i, k)$, pour tout i, k tels que $i \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \mathbb{N}$, avec de plus : $p(0, k) = p(i, 0) = 0$ lorsque $k \geq 1$ et $i \geq 1$ et $p(0, 0) = 1$.

Il s'agit de montrer que $p(i, k) = \sigma(i, k)$ pour tout $i, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq i \leq k \leq n$. Or les familles $(p(i, k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ et $(\sigma(i, k))_{0 \leq i \leq k \leq n}$ satisfont la même relation de récurrence et on vérifie également que

$$— \quad \sigma(0, k) = 0 \text{ pour tout } k \in \{1, \dots, n\}, \text{ car } 0 = 0^k = \sum_{i=0}^k \sigma(i, k)F_i(0) = \sigma(0, k);$$

— $\sigma(0, 0) = 1$, car $1 = 1^0 = \sum_{i=0}^0 \sigma(i, k) F_i(0) = \sigma(0, 0)$.

Alors, on montre facilement par récurrence sur $k \in \{0, \dots, n\}$, que pour tout $i \in \{0, \dots, k\}$, $p(i, k) = \sigma(i, k)$.

Partie 2 : Sommation à l'aide de Δ (sur 14 points)

6°) (sur 2 points) Notons $v = u|_H^{\text{Im}(u)}$. v est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire. De plus, toujours en tant que restriction sur H , $\text{Ker}(v) = \text{Ker}(u) \cap H = \{0\}$ par hypothèse. Il reste à montrer que v est surjective. Soit $y \in \text{Im}(u)$. Il existe $x \in E$ tel que $y = u(x)$. Par hypothèse, il existe $h \in H$ et $k \in \text{Ker}(u)$ tel que $x = h + k$. Alors $y = u(x) = u(h) = v(h)$ car $h \in H$, ce qu'il fallait démontrer.

7°) (sur 4 points) \diamond Lorsque $n = 0$, $\Delta_0 = 0$, donc $\text{Im}(\Delta_0) = \{0\}$ et $\text{Ker}(\Delta_0) = \mathbb{R}_0[X]$. Supposons maintenant que $n \geq 1$.

\diamond $\text{Im}(\Delta_n) = \Delta_n(\mathbb{R}_n[X]) = \Delta_n(\text{Vect}(E_0, \dots, E_n))$, donc d'après le cours,

$\text{Im}(\Delta_n) = \text{Vect}(\Delta_n(E_0), \dots, \Delta_n(E_n))$, puis d'après la question 3,

$\text{Im}(\Delta_n) = \text{Vect}(E_0, \dots, E_{n-1})$, donc $\text{Im}(\Delta_n) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

\diamond Il est clair que $E_0 \in \text{Ker}(\Delta_n)$, or d'après la formule du rang $n+1 = \dim(\mathbb{R}_n[X]) = \dim(\text{Ker}(\Delta_n)) + \dim(\text{Im}(\Delta_n)) = \dim(\text{Ker}(\Delta_n)) + n$, donc $\text{Ker}(\Delta_n)$ est la droite vectorielle dirigée par E_0 . Ainsi, $\text{Ker}(\Delta_n) = \mathbb{R}_0[X]$.

\diamond Montrons que $\mathbb{R}_n[X] = V \oplus \mathbb{R}_0[X]$:

Si $P \in V \cap \mathbb{R}_0[X]$, alors P est un polynôme constant et $P(0) = 0$, donc $P = 0$.

Ainsi, $V \cap \mathbb{R}_0[X] = \{0\}$.

Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = (P - P(0)) + P(0) \in V + \mathbb{R}_0[X]$, donc $\mathbb{R}_n[X] = V + \mathbb{R}_0[X]$.

Alors d'après la question précédente, $\Delta_n|_{\mathbb{R}_{n-1}[X]}$ est un isomorphisme.

8°) (sur 4 points) Posons $P = [\Delta_5|_V^{\mathbb{R}_4[X]}]^{-1}(X^4)$, de sorte que $P \in V$ et $\Delta(P) = X^4$. Il existe $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ tel que $P = aX^5 + bX^4 + cX^3 + dX^2 + eX$.

On sait que $\Delta(P) = X^4$, or

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= P(X+1) - P(X) \\ &= e + d(2X+1) + c(3X^2+3X+1) \\ &\quad + b(4X^3+6X^2+4X+1) \\ &\quad + a(5X^4+10X^3+10X^2+5X+1), \end{aligned}$$

donc en égalant les coefficients, on obtient les relations suivantes :

$5a = 1$, $10a + 4b = 0$, $10a + 6b + 3c = 0$, $5a + 4b + 3c + 2d = 0$ et $a + b + c + d + e = 0$.

Ainsi, $a = \frac{1}{5}$, $b = -\frac{1}{2}$, $c = \frac{1}{3}(3 - 2) = \frac{1}{3}$, $d = \frac{1}{2}(-1 + 2 - 1) = 0$

et $e = -\frac{1}{5} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{-6+15-10}{30} = -\frac{1}{30}$.

En conclusion, on a calculé que $P = \frac{X^5}{5} - \frac{X^4}{2} + \frac{X^3}{3} - \frac{X}{30}$.

9°) (sur 4 points) Soit $m \in \mathbb{N}$. Avec les notations de la question précédente,

$$\sum_{i=1}^m i^4 = \sum_{i=1}^m (P(i+1) - P(i)). \text{ C'est une somme télescopique,}$$

donc $\sum_{i=1}^m i^4 = P(m+1) - P(1)$, or $P(1) = a + b + c + d + e = 0$, donc

$$\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30} [6(m^4 + 4m^3 + 6m^2 + 4m + 1) - 15(m^3 + 3m^2 + 3m + 1) + 10(m^2 + 2m + 1) - 1].$$

Ainsi, $\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30} m(6m^3 + 9m^2 + m - 1) = \frac{m+1}{30} m(2m+1)(3m^2 + am - 1)$, où en égalant les coefficients de degré 1, $a - 2 = 1$.

En conclusion, $\sum_{i=1}^m i^4 = \frac{m+1}{30} m(2m+1)(3m^2 + 3m - 1)$.

Partie 3 : Bases duales (sur 26 points)

10°) (sur 3 points) \diamond Soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $0 = \varphi_j(0) = \varphi_j\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right)$, donc $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_j(e_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$.

Ceci démontre que e est une famille libre de E . De plus elle contient n vecteurs et $\dim(E) = n$, donc e est une base de E .

\diamond De même, soit $(\alpha_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i = 0$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $0 = 0(e_j) = \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i\right)(e_j)$, donc $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{i,j} = \alpha_j$.

Ceci démontre que φ est une famille libre de E^* . De plus elle contient n vecteurs et $\dim(E^*) = \dim(L(E, \mathbb{R})) = \dim(E) \times \dim(\mathbb{R}) = n$, donc φ est une base de E^* .

11°) (sur 2 points) Soit $x, y \in E$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Les décompositions de x et de y dans la base e s'écrivent $x = \sum_{j=1}^n x_j e_j$ et $y = \sum_{j=1}^n y_j e_j$, où $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $(y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

Alors $x + \alpha y = \sum_{j=1}^n (\alpha x_j + y_j) e_j$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$,

$$e_i^*(x + \alpha y) = \alpha x_i + y_i = \alpha e_i^*(x) + e_i^*(y).$$

Ceci prouve que e^* est une famille de n vecteurs de E^* .

De plus, pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $e_i^*(e_j)$ est égale à la i -ième coordonnée dans la base e de e_j , ainsi, $e_i^*(e_j) = \delta_{i,j}$. Alors d'après la question précédente, e^* est une base de E^* .

12°) \diamond (sur 6 points) Il est clair que u est une application linéaire de E dans \mathbb{R}^n . Soit x un vecteur non nul de E . Le système de vecteurs constitué du seul vecteur x est libre, donc on peut le compléter en une base (x, x_2, \dots, x_n) de E . D'après le cours, il existe une unique application linéaire f de E dans \mathbb{R} telle que $f(x) = 1$ et pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$, $f(x_i) = 0$. Ainsi $u(x) = (1, 0, \dots, 0) \neq 0$, donc $x \notin \text{Ker}(u)$. Ceci démontre que $\text{Ker}(u) = \{0\}$, donc que u est injective. De plus $\dim(E) = n = \dim(\mathbb{R}^n)$, donc u est un isomorphisme.

Soit $e = (e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs de E .

Si e est une base telle que $\varphi = e^*$, alors pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_i(e_j) = \delta_{i,j}$, donc pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(e_i) = c_i$, où c_i désigne le i -ème vecteur de la base canonique de \mathbb{R}^n . Ainsi, $u(e) = c$, où c est la base canonique de \mathbb{R}^n .

Réciproquement, si $u(e) = c$, alors pour tout $i \in \mathbb{N}_n$, $u(e_i) = c_i$, donc pour tout $i, j \in \mathbb{N}_n$, $\varphi_j(e_i) = \delta_{i,j}$. Alors, d'après la question 10, e est une base de E . De plus,

pour tout $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, $\varphi_j(x) = \sum_{i=1}^n x_i \varphi_j(e_i) = x_j$, donc $\varphi_j = e_j^*$.

On a donc montré que e est une base de E telle que $e^* = \varphi$ si et seulement si $u(e) = c$, c'est-à-dire si et seulement si $e = u^{-1}(c)$. Ceci prouve l'existence et l'unicité d'une base e de E telle que $e^* = \varphi$.

\diamond (sur 1 point) Soit $x \in E$. $\varphi_i(x) = e_i^*(x)$ est égale à la i -ème coordonnée de x dans la base e , donc $x = \sum_{i=1}^n \varphi_i(x) e_i$.

Soit $f \in E^*$. φ étant une base de E^* , il existe $(f_i)_{1 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^n$ telle que $f = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i$.

Soit $j \in \mathbb{N}_n$. Alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i(e_j) = \sum_{i=1}^n f_i \delta_{i,j} = f_j$, donc $f = \sum_{i=1}^n f_i \varphi_i$.

13°) (sur 2 points) D'après la question 1, $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

De plus, d'après la formule de Taylor, pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $P = \sum_{i=0}^n \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} (X - \alpha)^i$,

donc $\frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!}$ est la i -ème coordonnée de P dans la base $((X - \alpha)^k)_{0 \leq k \leq n}$. Ceci démontre que la base duale est $\varphi = (\varphi_0, \dots, \varphi_n)$, où pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$$\varphi_i = \left(P \mapsto \frac{P^{(i)}(\alpha)}{i!} \right).$$

14°) (sur 3 points) Il est clair que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f_x est bien une forme linéaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, posons $L_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}$. On vérifie facilement que,

pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $f_{x_j}(L_i) = L_i(x_j) = \delta_{i,j}$. Ainsi, d'après la question 10, $L = (L_0, \dots, L_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$ et $(f_{x_i})_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]^*$. De plus d'après la question 12, L est sa base préduale.

15°) (sur 3 points) On a montré en question 3 que, pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\Delta_n^j(E_i) = E_{i-j}$ en convenant que $E_k = 0$ lorsque $k \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$. On en déduit que $\Delta_n^j(E_i)(0) = E_{i-j}(0) = \delta_{i,j}$, car lorsque $k \geq 1$, $E_k(0) = 0$.

Ainsi, si l'on pose, pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, $\Psi_j(P) = \Delta_n^j(P)(0)$, Ψ_j est une forme linéaire et, pour tout $i, j \in \{0, \dots, n\}$, $\Psi_j(E_i) = \delta_{i,j}$. Alors, d'après les questions 10 à 12, la base duale de \mathcal{E}_n est $\Psi = (\Psi_0, \dots, \Psi_n)$.

16°) (sur 6 points)

◇ Posons $P = Q(X + \alpha)$. Ainsi, pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$, $P(h) \in \mathbb{Z}$.

D'après la question précédente, $P = \sum_{i=0}^n \Psi_i(P)E_i = \sum_{i=0}^n \Delta_n^i(P)(0)E_i$.

Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. Notons $R(k)$ l'assertion suivante :

pour tout $h \in \{0, \dots, n - k\}$, $\Delta_n^k(P)(h) \in \mathbb{Z}$.

Pour $k = 0$: pour tout $h \in \{0, \dots, n\}$, $\Delta_n^0(P)(h) = P(h) \in \mathbb{Z}$, donc $R(0)$ est vraie.

Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, supposons $R(k - 1)$. Soit $h \in \{0, \dots, n - k\}$.

$\Delta_n^k(P)(h) = \Delta_n(\Delta_n^{k-1}(P))(h) = \Delta_n^{k-1}(P)(h + 1) - \Delta_n^{k-1}(P)(h) \in \mathbb{Z}$ d'après $R(k - 1)$, car h et $h + 1$ sont dans $\{0, \dots, n - k + 1\}$. Ceci prouve $R(k)$.

En particulier, d'après le principe de récurrence, on obtient que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$,

$\Delta_n^i(P)(0) \in \mathbb{Z}$. Or on a vu que $P = \sum_{i=0}^n \Delta_n^i(P)(0)E_i$, donc si l'on montre que $E_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$

pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, alors on en déduit que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, puis que, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $Q(m) = P(m - \alpha) \in \mathbb{Z}$.

◇ Soit $i \in \{0, \dots, n\}$. Soit $m \in \mathbb{Z}$.

Il nous reste donc à montrer que $E_i(m) = \frac{1}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (m - k) \in \mathbb{Z}$.

Lorsque $0 \leq m \leq i - 1$, $E_i(m) = 0$ et lorsque $m \geq i$, $E_i(m) = \frac{1}{i!} \frac{m!}{(m - i)!} = \binom{m}{i} \in \mathbb{Z}$.

Enfin, lorsque $m \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, posons $r = -m \in \mathbb{N}^*$.

Alors $E_i(m) = \frac{(-1)^i}{i!} \prod_{k=0}^{i-1} (r + k) = \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(r + i - 1)!}{(r - 1)!} = (-1)^i \binom{r + i - 1}{i} \in \mathbb{Z}$.

Partie 4 : Relation entre dérivée et dérivée discrète (sur 14 points)

17°) ◇ (sur 3 points) Soit $x \in \mathbb{R}$. Notons temporairement f l'application exponentielle. Soit $m \in \mathbb{N}$. f est de classe C^∞ donc on peut appliquer la formule de Taylor avec reste

intégral en x et 0 : $e^x = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x - t)^m}{m!} f^{(m+1)}(t) dt$.

Ainsi, $e^x = \sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} + J_m$ avec $J_m = \int_0^x \frac{(x - t)^m}{m!} e^t dt$.

$|J_m| \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x-t|^m}{m!} e^{|x|} dt \leq \int_{\min(0,x)}^{\max(0,x)} \frac{|x|^m}{m!} e^{|x|} dt = \frac{|x|^{m+1}}{m!} e^{|x|} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$ d'après les croissances comparées. D'après le principe des gendarmes, ceci démontre que

$\sum_{k=0}^m \frac{x^k}{k!} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} e^x$, ce qu'il fallait démontrer.

◇ (sur 3 points) Adaptons cette preuve lorsque $f(x) = \ln(1+x)$. Soit $x \in [0, 1]$.

On vérifie par récurrence que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^k}$. Ainsi, la

formule de Taylor avec reste intégral donne, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k + K_m, \text{ où } K_m = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{m!} (-1)^m \frac{m!}{(1+t)^{m+1}} dt.$$

Ainsi, $|K_m| = \int_0^x \frac{(x-t)^m}{(1+t)^{m+1}} dt \leq \int_0^x (x-t)^m dt = \left[-\frac{(x-t)^{m+1}}{m+1} \right]_0^x = \frac{x^{m+1}}{m+1}$, donc

$0 \leq |K_m| \leq \frac{1}{m+1} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0$, ce qui prouve que $\sum_{k=1}^m \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \ln(1+x)$.

18°) ◇ (sur 3 points) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Pour tout $k > n$, $D^k(P) = P^{(k)} = 0$, donc la somme $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{D^k}{k!}(P)$ est une somme finie. À ce titre, elle est bien définie. Ainsi e^D est

correctement défini et $e^D(P) = \sum_{k=0}^n \frac{P^k(X)}{k!}$.

De plus, d'après la formule de Taylor pour les polynômes, pour tout $t, a \in \mathbb{R}$,

$P(t+a) = \sum_{k=0}^n \frac{P^k(a)}{k!} t^k$, donc pour $t = 1$, $P(a+1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^k(a)}{k!}$. Il s'agit d'une égalité

entre applications polynomiales, mais sur \mathbb{R} , les polynômes formels et les applications

polynomiales sont identifiés, donc $P(X+1) = \sum_{k=0}^n \frac{P^k(X)}{k!}$. Ceci prouve que

$e^D(P) = P(X+1) = \Delta(P) + P = (\Delta + I)(P)$, donc $e^D \in L(\mathbb{R}[X])$ et $e^D = \Delta + I$.

◇ (sur 5 points) • Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. On montre par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que

$\Delta^k(P) = \Delta_n^k(P)$, or d'après la question 3, $\Delta_n^{n+1} = 0$, donc lorsque $k > n$,

$\Delta_n^k = 0$ puis $\Delta^k(P) = 0$. Ainsi la somme $\sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k(P)}{k}$ est une somme finie.

À ce titre, elle est bien définie. Ainsi $\ln(\Delta + I)$ est correctement défini

et $\ln(\Delta + I)(P) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k(P)}{k}$.

• Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$.

$(\Delta D)(Q) = \Delta(Q') = Q'(X+1) - Q'(X) = [Q(X+1) - Q(X)]' = (D\Delta)(P)$,

donc $\Delta D = D\Delta$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on en déduit que $\Delta^k D = D\Delta^k$.

• Soit $k \in \{0, \dots, n\}$. D'après la question 15, $DE_k = \sum_{i=0}^n \Delta_n^i(DE_k)(0)E_i$,

donc $DE_k = \sum_{i=0}^n D\Delta^i(E_k)(0)E_i$, or $\Delta^i(E_k) = E_{k-i}$, en convenant que $E_h = 0$ lorsque

$h < 0$. Ainsi, $DE_k = \sum_{i=0}^n D(E_{k-i})(0)E_i = \sum_{i=0}^{k-1} D(E_{k-i})(0)E_i$.

Soit $j \in \{1, \dots, n\}$. $D(E_j)(X) = \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^{j-1} \prod_{\substack{0 \leq h \leq j-1 \\ h \neq k}} (X - h)$,

donc $D(E_j)(0) = \frac{1}{j!} \prod_{h=1}^{j-1} (-h) = \frac{(-1)^{j-1}}{j!} (j-1)! = \frac{(-1)^{j-1}}{j}$.

On en déduit que $DE_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-i-1}}{k-i} E_i = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} E_{k-j}$,

donc pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $D(E_k) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j(E_k)$, or (E_0, \dots, E_n) est une

base de $\mathbb{R}_n[X]$, donc $D(P) = \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j-1}}{j} \Delta^j(P) = \ln(\Delta + I)(P)$.

On a prouvé que $\ln(\Delta + I) = D$.