Corrigé du DM 31,
fortement inspiré de : Mines, PC 2001

Préliminaires

1°) Pour tout $x \in V$,
$x \in \text{Ker}(f^k) \Rightarrow f^k(x) = 0 \Rightarrow f^{k+1}(x) = f(f^k(x)) = f(0) = 0 \Rightarrow x \in \text{Ker}(f^{k+1})$
Donc $\ker f^k \subset \ker f^{k+1}$ pour tout entier naturel k.

2°)
⋄ On suppose que $\text{Ker}(f^p) = \text{Ker}(f^{p+1})$.
Soit $x \in V$ et $k \in \mathbb{N}$. Alors

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(f^{p+k+1}) &\iff f^{p+1}(f^k(x)) = 0 \iff f^k(x) \in \text{Ker}(f^{p+1}) \iff f^k(x) \in \text{Ker}(f^p) \\ &\iff f^p(f^k(x)) = 0 \iff x \in \text{Ker}(f^{p+k}), \end{aligned}$$

donc $\text{Ker}(f^{k+p+1}) = \text{Ker}(f^{k+p})$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
Ceci prouve que la suite $(\dim(\text{Ker} f^k))_{k \geq p}$ est constante.
⋄ On suppose que V est de dimension $n \in \mathbb{N}$.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, posons $d_k = \dim(\text{Ker}(f^k))$. D'après la question 1, (d_k) est une suite croissante. Elle est de plus majorée par n.
Soit $p \in \mathbb{N}$. Si $(d_k)_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante, on montre par récurrence que, pour tout $k \in \{0, \ldots, p\}$, $d_k \geq k$. En particulier $p \leq d_p \leq n$.
La suite $(d_k)_{0 \leq k \leq n+1}$ n'est donc pas strictement croissante. Ainsi, il existe $p \leq n$ tel que $(d_k)_{0 \leq k \leq p}$ est strictement croissante et tel que $d_p = d_{p+1}$. Alors, d'après le point précédent, pour tout $k \geq p$, $d_k = d_p$, ce qu'il fallait démontrer.

3°) Si $q \leq n$, alors on a bien $u^n = u^q u^{n-q} = 0$.
Supposons maintenant que $q > n$. Avec les notations de la question 2, on sait que $d_n = d_{n+1}$, or $\ker(u^n) \subset \ker(u^{n+1})$, donc $\ker(u^n) = \ker(u^{n+1})$. Ainsi, pour tout $k \geq n$, $\ker(u^k) = \ker(u^n)$. En particulier $\ker(u^n) = \ker(u^q) = V$, donc, dans tous les cas, $u^n = 0$.

Partie I

4°)
$\diamond$ F est de dimension finie égale à $n+1$, donc F possède une base $\mathcal{B}$ de la forme $\mathcal{B}=(P_0,\ldots,P_n)\in\mathbb{R}[X]^{n+1}$. Posons $q=\max\limits_{0\leq i\leq n}\deg(P_i)$. Tout polynôme P de F est une combinaison linéaire des polynômes de la base $\mathcal{B}$, donc $\deg(P)\leq q$ et $D^{q+1}(P)=0$.
Notons D_F l'endomorphisme induit par D sur F. Par récurrence sur $h\in\mathbb{N}$, on montre que, pour tout $h\in\mathbb{N}$ et $P\in F$, $D_F^h(P)=D^h(P)$ (en effet, si la propriété est vraie à l'ordre h, alors pour tout $P\in F$, $D_F^{h+1}(P)=D_F^h(D(P))$, or $D(P)\in F$, donc par hypothèse de récurrence, $D_F^{h+1}(P)=D^h(D(P))=D^{h+1}(P)$).
On en déduit que $D_F^{q+1}=0$, donc D_F est nilpotent.
$\diamond$ D'après la question 3, $D_F^{n+1}=0$. Soit $P\in F$: $D^{n+1}(P)=0$, donc $\deg(P)\leq n$. Ainsi $F\subset\mathbb{R}_n[X]$. Or $\dim(F)=n+1=\dim(\mathbb{R}_n[X])$, donc $F=\mathbb{R}_n[X]$.
$\diamond$ Réciproquement, on vérifie que $\{0\}$ et les $\mathbb{R}_n[X]$ sont stables par D. Ce sont donc exactement les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie stables par D.
$\diamond$ Supposons que F est un sous-espace de dimension infinie de $\mathbb{R}[X]$, stable par F.
Soit $n\in\mathbb{N}$. $\mathbb{R}_n[X]$ est de dimension finie, donc F n'est pas inclus dans $\mathbb{R}_n[X]$: il existe $P\in F$ tel que $\deg(P)>n$. Notons $p=\deg(P)$.
Posons $G=\{Q\in F\ /\ \deg(Q)\leq p\}$: G est stable par F, il est inclus dans $\mathbb{R}_p[X]$, donc il est de dimension finie et d'après le point précédent, il existe $q\in\mathbb{N}$ tel que $G=\mathbb{R}_q[X]$ (ou bien $G=\{0\}$). Mais $P\in G$, donc $q\geq p\geq n$. On en déduit que $\mathbb{R}_n[X]\subset G$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, donc $G=\mathbb{R}[X]$. La réciproque étant évidente, le seul sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension infinie stable par D est $\mathbb{R}[X]$.

5°)
$\diamond$ $D_n=(X^2-\lambda)(g)$, donc D_n commute avec g en tant que polynôme en g : si u est un polynôme en g de la forme $u=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k g^k$, alors $ug=\sum_{k=0}^{p}\alpha_k g^{k+1}=gu$.
$\diamond$ Par récurrence, on en déduit que, pour tout $k\in\mathbb{N}$, g commute avec D_n^k.
On remarque que $P\in\mathbf{R}_p[X]$ si et seulement si $D_n^{p+1}(P)=0$.
Soit $P\in\mathbf{R}_p[X]$: $D_n^{p+1}(g(P))=g(D_n^{p+1}(P))=g(0)=0$, donc $g(P)\in\mathbf{R}_p[X]$.
Ceci montre que $\mathbf{R}_p[X]$ est stable par g.

6°) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.
$\diamond$ Supposons que F est stable par g. Soit $P\in F$. Alors $g(P)\in F$ puis $g(g(P))\in F$, donc $D(P)=g^2(P)-\lambda P\in F$. Ainsi F est aussi stable par D.
$\diamond$ Réciproquement, supposons que F est stable par D. Lorsque $F=\mathbb{R}[X]$ ou $F=\{0\}$, il est évident que F est stable par g. Sinon, d'après la question 4, il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $F=\mathbb{R}_n[X]$.
D est un polynôme en g, donc g commute avec D, donc aussi avec D^{n+1}.
Soit $P\in F$: $D^{n+1}(g(P))=g(D^{n+1}(P))=g(0)=0$, donc $g(P)\in F$. On a prouvé que F est stable par g.

7°) **a)** $\dim(\mathbb{R}_0[X])=1$ et $D_0=0$. Soit $g\in L(\mathbb{R}_0[X])$. Notons G la matrice de g dans la base canonique de $\mathbb{R}_0[X]$, égale à (1). Alors,

$g^2 = \lambda Id + D_0 \Longleftrightarrow G^2 = \lambda$, or $G \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$, donc s'il existe $g \in L(\mathbb{R}_0[X])$ tel que $g^2 = \lambda Id + D_0$, alors $\lambda \geq 0$ et réciproquement, si $\lambda \geq 0$, en posant $g = \sqrt{\lambda} Id$, on a bien $g^2 = \lambda Id + D_0$.
En conclusion, la condition nécessaire et suffsante attendue est : $\lambda \geq 0$.

b) $\diamond$ Supposons qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbf{R}_n[X]$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$. Alors d'après la question 5, $\mathbb{R}_0[X]$ est stable par g. Si l'on note g_0 l'endomorphisme induit par g sur $\mathbb{R}_0[X]$, on a $g_0^2 = \lambda Id_{\mathbb{R}_0[X]} + D_0$ ce qui est impossible car $\lambda < 0$.
$\diamond$ Supposons qu'il existe un endomorphisme g de $\mathbf{R}[X]$ tel que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}[X]} + D$.
Alors d'après la question 6, $\mathbb{R}_0[X]$ étant stable par D, il est également stable par g. Si l'on note g_0 l'endomorphisme induit par g sur $\mathbb{R}_0[X]$, on a à nouveau $g_0^2 = \lambda Id_{\mathbb{R}_0[X]} + D_0$ ce qui est impossible car $\lambda < 0$.

8°) **a)** $f^n \neq 0$ donc il existe y tel que $f^n(y) \neq 0$.
Soit $(\alpha_i)_{0 \leq i \leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i f^i(y) = 0$. Supposons qu'il existe $i \in \{0, \ldots, n\}$ tel que $\alpha_i \neq 0$. On peut alors poser $k = \min\{i \in \{0, \ldots, n\} \ / \ \alpha_i \neq 0\}$.
Ainsi, $0 = \sum_{i=k}^{n} \alpha_i f^i(y)$. Composons cette égalité par f^{n-k} : en tenant compte du fait que $f^h(y) = 0$ dès que $h > n$, on en déduit que $\alpha_k f^n(y) = 0$, or $f^n(y) \neq 0$, donc $\alpha_k = 0$, ce qui est faux. Ainsi, pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\alpha_i = 0$. Ceci prouve que B est une famille libre de V. De plus B possède $n+1$ vecteurs et $\dim(V) = n+1$, donc B est une base de V.
$\diamond$ L'image par f du premier vecteur de B est nul, donc la première colonne de $\mathrm{mat}(f, B)$ est nulle. Ensuite, l'image du $i$ème vecteur de B par f est égale au $(i-1)$-ième vecteur de B, donc $\mathrm{mat}(f, B) = A_0$.

b) Puisque $D_n^{n+1} = 0$ et $D_n^n(X^n) = n! \neq 0$, on peut appliquer la question a), ce qui assure l'existence de la base B_n.
Dans cette base, la matrice de $\lambda Id + D_n$ est $A_0 + \lambda I_n$ soit A_λ.

9°) **a)** Soit $h \in L(\mathbb{R}_2[X])$.
Supposons que h commute avec D_2.
Notons $y \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que $D_2^2(y) \neq 0$. Alors avec les notations de la question 8.a, $h(y)$ se décompose sur la base B_2 en : $h(y) = ay + bD_2(y) + cD_2^2(y)$, où $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
h et D_2 commutent, donc pour tout $k \in \{0, 1, 2\}$, h et D_2^k commutent également et :
$h(D_2^k(y)) = D_2^k(h(y)) = aD_2^k(y) + bD_2^{k+1}(y) + cD_2^{k+2}(y) = (aId + bD_2 + cD_2^2)(D_2^k(y))$.
Ainsi h et $aId + bD_2 + cD_2^2$ sont deux endomorphismes qui coincident sur la base B_2, donc ils sont égaux.
Réciproquement, il est clair que si $h = aId + bD_2 + cD_2^2$ alors h est un polynôme en D_2, donc h et D_2 commutent.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
On souhaite résoudre l'équation (E) : $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_2[X]} + D_2$ en l'inconnue g.
Si g est solution, alors g commute avec D_2, donc d'après la question précédente, sans perte de généralité, on peut supposer qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $g = aId + bD_2 + cD_2^2$.
Dans ce cas, en tenant compte du fait que $D_2^3 = 0$, on calcule :
$g^2 = a^2 Id + 2abD_2 + (b^2 + 2ac)D_2^2$, donc $(E) \Longleftrightarrow \lambda Id + D_2 = a^2 Id + 2abD_2 + (b^2 + 2ac)D_2^2$.

Or la famille (Id, D_2, D_2^2) est libre (sinon B_2 serait liée, en tant qu'image de (Id, D_2, D_2^2) par l'application linéaire $u \longmapsto u(y)$ de $L(\mathbb{R}_2[X])$ dans $\mathbb{R}_2[X]$),
donc $(E) \Longleftrightarrow (a^2 = \lambda, 2ab = 1, 2ac + b^2 = 0)$.
Lorsque $\lambda \leq 0$, ce dernier système n'a aucune solution. Supposons maintenant que $\lambda > 0$. Dans ce cas, $(E) \Longleftrightarrow (a = \pm\sqrt{\lambda}, b = \dfrac{1}{2a}, c = -\dfrac{1}{8a^3})$.
En conclusion, il existe des endomorphismes g de $\mathbf{R}_2[X]$ tels que $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_2[X]} + D_2$ si et seulement si $\lambda > 0$.

c) Soit $G \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Notons g l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $G = \mathrm{mat}(g, B_2)$.
Alors $G^2 = A_1 \Longleftrightarrow g^2 = Id_{\mathbb{R}_2[X]} + D_2$, donc d'après la question précédente,
$G^2 = A \Longleftrightarrow \exists\varepsilon \in \{1, -1\},\ \ (a = \varepsilon, b = \dfrac{1}{2\varepsilon}, c = -\dfrac{1}{8\varepsilon})$.
Finalement, $G^2 = A_1 \Longleftrightarrow G \in \left\{I_2 + \dfrac{1}{2}A_0 - \dfrac{1}{8}A_0^2, -I_2 - \dfrac{1}{2}A_0 + \dfrac{1}{8}A_0^2\right\}$.

Partie II

10°) **a)** $\diamond$ Si $g^2 = D_n$ alors $g^{2n+2} = D_n^{n+1} = 0$ donc g est nilpotent.
$\diamond$ g n'est pas injectif car $g^2 = D_n$ ne l'est pas, donc $dim(\ker(g)) \geq 1$.
De plus, si $\ker(g) = \ker(g^2)$, alors d'après la question 2, $\ker(g) = \ker(g^{n+1}) = \mathbb{R}_n[X]$, donc $0 = g = g^2 = D_n$ ce qui est faux.
Ainsi, $\dim(\mathrm{Ker}(g^2)) > \dim(\mathrm{Ker}(g)) \geq 1$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(g^2)) \geq 2$.

b) Or $\mathrm{Ker}(g^2) = \mathrm{Ker}(D_n) = \mathbb{R}_0[X]$ qui est de dimension 1. Ceci contredit le résultat précédent : g n'existe pas.

c) Si $g^2 = D$ alors d'après la question 6, pour $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}_n[X]$ est stable par D_n donc par g. On peut ainsi noter g_n l'endomorphisme induit par g sur $\mathbb{R}_n[X]$. Ainsi, il existe g_n tel que $g_n^2 = D_n$ ce qui est impossible.

11°) **a)** On sait que les primitives d'un polynôme sont des polynômes donc D est surjective. Ainsi $D(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$ puis pour tout $m \in \mathbb{N}$, $D^m(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$ et $g(g^{k-1}(\mathbb{R}[X])) = D^m(\mathbb{R}[X]) = \mathbb{R}[X]$ donc g est surjective.

b) $\forall q \leq k, \quad \mathrm{Ker}(g^q) \subset \mathrm{Ker}(g^k) = \mathrm{Ker}(D^m) = \mathbb{R}_{m-1}[X]$.
Donc $\mathrm{Ker}(g^q)$ est de dimension finie pour $0 \leq q \leq k$.

c) $\diamond$ Soit $P \in \mathrm{Ker}(g^p)$. Alors $g^{p-1}(g(P)) = g^p(P) = 0$, donc $g(P) \in \mathrm{Ker}(g^{p-1})$. Ainsi, l'applicaton Φ est correctement définie. Elle est linéaire en tant que restriction d'une application linéaire à des sous-espaces vectoriels.
$\diamond$ Noyau de Φ : $\mathrm{Ker}\Phi = \mathrm{Ker}(g) \cap \mathrm{Ker}(g^p) = \mathrm{Ker}(g)$, car $p \geq 1$, donc $\mathrm{Ker}(g) \subset \mathrm{Ker}(g^p)$.
$\diamond$ Image de Φ : soit $P \in \mathrm{Ker}(g^{p-1})$. g étant surjective, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $g(Q) = P$. De plus, $g^p(Q) = g^{p-1}(P) = 0$ donc Q est élément de $\mathrm{Ker}(g^p)$ ce qui permet d'écrire $\Phi(Q) = P$. Ainsi $Im(\Phi) = \mathrm{Ker} g^{p-1}$ et Φ est surjective.
$\diamond$ On applique le théorème du rang : $\dim(\mathrm{Ker}(\Phi)) + \dim(\mathrm{Im}(\Phi)) = \dim(\mathrm{Ker}(g^p))$, donc $\dim(\mathrm{Ker}(g)) + \dim(\mathrm{Ker}(g^{p-1})) = \dim(\mathrm{Ker}(g^p))$.
Il en résulte $\dim(\mathrm{Ker}(g^p)) = p \times \dim(\mathrm{Ker}(g))$ pour tout $p \in \{0, \ldots, k\}$ (en effet, cette question est en fait valable pour tout $p \in \{1, \ldots, k\}$ et cette dernière relation est évidente pour $p = 0$).

d) Soit $m \geq 1$ et $k \geq 2$.
Supposons qu'il existe au moins un endomorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[X]$ tel que $g^k = D^m$. D'après les questions précédentes,
$\dim(\mathrm{Ker}(D^m)) = \dim(\mathbb{R}_{m-1}[X]) = m = \dim(\mathrm{Ker}(g^k)) = k \times \dim(\mathrm{Ker}(g))$. On en déduit que m est un multiple de k.
Réciproquement, supposons que k divise m : il existe $p \in \{1, \dots, m\}$ tel que $m = pk$. Posons alors $g = D^p$. On a bien $g^k = D^m$.
D'où la condition nécessaire et suffisante : m est un multiple de k.
Cette condition n'est pas remplie lorque $m = 1$ et $k = 2$, ce qui redémontre la question 10.c.

Partie III

12°) **a)** On notera I au lieu de I_{n+1}.
$(I + tD_n)(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k) = \sum_{k=0}^{n}\left[(-1)^k t^k D_n^k - (-1)^{k+1}t^{k+1}D_n^{k+1}\right]$. C'est une somme télescopique, donc $(I+tD_n)(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k) = I-(-1)^{n+1}t^{n+1}D_n^{n+1} = I$, car $D_n^{n+1} = 0$.
Donc la matrice carrée $I + tD_n$ est inversible et son inverse que l'on notera simplement $Q(t)$ est définie par $Q(t) = (I + tD_n)^{-1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k.$.
Ainsi, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $a_k(t) = (-t)^k$.
b) Les fonction a_k sont dérivables, donc d'après les théorèmes usuels, Q est aussi dérivable. De plus, $Q(t)$ commute avec D_n en tant que polynôme de D_n.
En dérivant l'égalité $Q(t)(I + tD_n) = I$ vraie pour tout t, il vient :
$Q'(t)(I + tD_n) + Q(t)D_n = 0$, donc $Q'(t) = -Q(t)D_nQ(t) = -Q(t)^2D_n$.
c) Soit $t \in \mathbb{R}$. Il existe un polynôme P tel que $L_n(t) = D_nP(D_n) = P(D_n)D_n$, donc $L_n(t)^{n+1} = D_n^{n+1}P^{n+1}(D_n)$ or $D_n^{n+1} = 0$ d'où $L_n^{n+1} = 0$.
d) $\diamond$ En ajoutant un terme nul à L_n on obtient :
$L'_n(t) = \sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}t^{k-1}D_n^k = D_n\sum_{k=0}^{n}(-1)^k t^k D_n^k = D_nQ(t)$.
$\diamond$ $L_n(t)$ et $L'_n(t)$ sont des polynômes en D_n, donc ils commutent. On en déduit alors par récurrence sur k que $\frac{d}{dt}(L_n^k(t)) = kL'_n(t)L_n^{k-1}(t)$, donc $\frac{d}{dt}(L_n^k(t)) = kL_n^{k-1}(t)D_nQ(t)$.

13°) **a)** Par sommation par paquets,
$$\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{p=0}^{n}\frac{u^p}{p!}(L_n(t))^p\sum_{q=0}^{n}\frac{v^q}{q!}(L_n(t))^q = \sum_{k=0}^{2n}\Big(\sum_{\substack{p+q=k\\0\leq p,q\leq n}}\frac{u^pv^q}{p!q!}L_n(t)^{p+q}\Big),$$
or $L_n(t)^{n+1} = 0$,
$$\text{donc } \varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k}\frac{u^pv^q}{p!q!}\Big)L_n(t)^k = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\frac{u^pv^{k-p}}{p!(k-p)!}\right)L_n(t)^k,$$

puis $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{p=0}^{k}\binom{k}{p}u^p v^{k-p}\frac{1}{k!}\right)L_n(t)^k$, donc d'après la formule du binôme de Newton, $\varphi_u(t)\varphi_v(t) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(u+v)^k}{k!}L_n(t)^k = \varphi_{u+v}(t)$.

b) $t \mapsto \varphi_u(t)$ est dérivable comme combinaison linéaire de fonctions dérivables.
D'après la question 12.d,

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_u'(t) & = & \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{u^k}{k!}kQ(t)D_nL_n^{k-1}(t) \\
 & = & \displaystyle uQ(t)D_n\sum_{k=1}^{n}\frac{u^{k-1}}{(k-1)!}L_n^{k-1}(t) \\
 & = & \displaystyle uQ(t)D_n\sum_{k=0}^{n-1}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t) \\
 & = & \displaystyle uQ(t)D_n\sum_{k=0}^{n}\frac{u^k}{k!}L_n^k(t),
\end{array}$$

car on démontre comme en 12.c que $D_nL_n^n(t) = 0$.
Ainsi $\varphi_u'(t) = uQ(t)D_n\varphi_u(t)$.

c) φ_1' est dérivable comme produit de fonctions dérivables et

$$\begin{array}{rcl}
\varphi_1''(t) & = & Q'(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_n\varphi_1'(t) \\
 & = & -Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) + Q(t)D_nQ(t)D_n\varphi_1(t) = 0
\end{array}$$

Par conséquent, en passant aux coefficients de ces matrices, il existe deux matrices A et B de $\mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ telles que $\varphi_1(t) = A + tB$.
On a $A = \varphi_1(0)$ et $B = \varphi_1'(0)$. Ainsi, $\varphi_1(t) = \varphi_1(0) + t\varphi_1'(0)$.
Comme $L_n(0) = 0$ on déduit $\varphi_1(0) = I$ et $\varphi_1'(0) = D_n\varphi_n(0) = D_n$ et l'on conclut :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \qquad \varphi_1(t) = I + tD_n.$$

14°) **a)** $\lambda I + D_n = \lambda(I + \frac{1}{\lambda}D_n) = \lambda\varphi_1(\frac{1}{\lambda}) = \lambda(\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda}))^2 = (\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda}))^2$.
Ainsi, en posant $M = \pm\sqrt{\lambda}\varphi_{\frac{1}{2}}(\frac{1}{\lambda})$, on a bien $M^2 = \lambda I + D_n$.
Notons g l'unique endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice dans la base B_n est égale à M. Alors $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}_n[X]} + D_n$.

b) Pour $\lambda = 1$ et $n = 2$ il vient $L_n(1/\lambda) = L_2(1) = D_2 - \frac{1}{2}D_2^2$ puis
$\varphi_{\frac{1}{2}}(1) = I + \frac{1}{2}L_2(1) + \frac{1}{8}L_2^2(1) = I + \frac{1}{2}(D_2 - \frac{1}{2}D_2^2) + \frac{1}{8}D_2^2 = I + \frac{1}{2}D_2 - \frac{1}{8}D_2^2$
On retrouve bien les matrices G de la question 9.c, puisque $A_0 = D_2$ avec les notations de l'énoncé.

Partie IV

15°) **a)** Pour tout $x \in [-1, +\infty[$, $h(x) = (1+x)^\alpha$ avec $\alpha = \frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, h possède un développement limité à l'ordre n au voisinage de 0, donné par la formule $h(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + o(x^n)$, avec $b_0 = 1$ et pour tout $k \geq 1$, $b_k = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} = \dfrac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\dots(\frac{1}{2}-k+1)}{k!}$. On calcule
$b_k = \dfrac{1}{2}(-1)^{k-1}\dfrac{(2-1)\times(2.2-1)\times\cdots\times(2.(k-1)-1)}{k!2^{k-1}}$, puis
$b_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!2^k}[1\times 3\times\cdots\times(2k-3)] = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!2^k}\times\dfrac{1\times 2\times 3\times\cdots\times(2k-3)(2k-2)}{2\times 4\times(2k-2)}$, donc
$b_k = \dfrac{(-1)^{k-1}}{k!2^k}\dfrac{(2k-2)!}{2^{k-1}(k-1)!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}\times\dfrac{(2k-1)!}{k!(k-1)!} = \dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)2^{2k-1}}\begin{pmatrix}2k-1\\ k\end{pmatrix}$.

b) On peut écrire

$$\begin{aligned}1+x &= h(x)^2 = \Big(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n)\Big)^2\\ &= \sum_{0\leq p,q\leq n} b_p b_q x^{p+q} + o(x^n) \quad (\text{car } \sum_{k=0}^{n} b_k x^k = O(1))\\ &= \sum_{k=0}^{n}\Big(\sum_{p+q=k} b_p b_{k-p}\Big)x^k + o(x^n).\end{aligned}$$

Alors, d'après l'unicité du développement limité, pour tout $k \in \{0,\dots,n\}$,
$\displaystyle\sum_{p=0}^{k} b_p b_{k-p} = \begin{cases}1 & \text{si } k\leq 1\\ 0 & \text{si } k\geq 2\end{cases}$, ce qu'il fallait démontrer.

16°) **a)** Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et n un majorant de son degré.

Alors $D^p(P) = 0$ pour $p > n$ donc $T(P) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{b_p}{\lambda^p}D^p(P)$ qui est bien un polynôme.

Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, en notant n un majorant commun du degré de P et de Q, on a $T(\alpha P + Q) = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{b_p}{\lambda^p}D^p(\alpha P + Q) = \alpha T(P) + T(Q)$, donc T est linéaire.

Ainsi T est un endomorphisme de $\mathbb{R}[X]$ qui d'après le calcul précédent laisse stable les sous-espaces $\mathbb{R}_n[X]$.

b) Notons T_n l'endomorphisme induit par T sur $\mathbb{R}_n[X]$.
Pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, $T^2(P) = T_n^2(P)$.

Or $T_n = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{b_p}{\lambda^p}D_n^p$ ce qui conduit, compte tenu de $D_n^k = 0$ pour $k > n$ à

$T_n^2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{n}\frac{b_p}{\lambda^p}D_n^p\sum_{q=0}^{n}\frac{b_q}{\lambda^q}D_n^q = \sum_{k=0}^{n}\sum_{p+q=k}\frac{b_p b_q}{\lambda^{p+q}}D_n^{p+q} = \sum_{k=0}^{n}\frac{c_k}{\lambda^k}D_n^k$, en posant pour tout $k \in \mathbb{N}$, $c_k = \displaystyle\sum_{p=0}^{k} b_p b_{k-p}$. Ainsi, d'après la question 15.b, $T_n^2 = Id_{\mathbb{R}_n[X]} + \frac{1}{\lambda}D_n$.

On en déduit que, pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $T^2(P) = P + \dfrac{1}{\lambda} D(P)$
et finalement que $T^2 = Id_{\mathbb{R}[X]} + \dfrac{1}{\lambda} D$.
Posons $g = \pm\sqrt{\lambda} T$. Alors $g^2 = \lambda Id_{\mathbf{R}[X]} + D$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Posons $g_n = \pm\sqrt{\lambda} \displaystyle\sum_{p=0}^{n} \frac{b_p}{\lambda^p} D_n^p$.
D'après le calcul précédent, $g_n^2 = \lambda Id_{\mathbb{R}_n[X]} + D_n$.
Lorsque $n = 2$ et $\lambda = 1$, $g_2 = \pm(b_0 I + b_1 D_2 + b_2 D_2^2)$ avec $b_0 = 1, b_1 = \dfrac{1}{2}, b_2 = -\dfrac{1}{8}$ ce qui redonne les matrices de la question 9.c.