DS 2 : un corrigé

Le barème comporte un total de 60 points.

Exercices (sur 11 points)

Exercice 1 (sur 3 points) :

1°) (sur 1 point)
Soit $p, q \in \mathbb{R}$: $\cos p + \cos q = \mathrm{Re}(e^{ip} + e^{iq}) = \mathrm{Re}\Big(e^{i\frac{p+q}{2}}(e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{i\frac{q-p}{2}})\Big)$, donc
$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p-q}{2} \times \mathrm{Re}(e^{i\frac{p+q}{2}}) = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$.

2°) (sur 2 points)
$(E) \Longleftrightarrow 3\cos(5x) = 2\cos(9x)\cos(5x) \Longleftrightarrow (\cos(5x) = 0) \vee (\cos(9x) = \frac{3}{2} > 1)$,
donc $(E) \Longleftrightarrow \cos(5x) = 0 \Longleftrightarrow 5x \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi]$,
donc l'ensemble des solutions est $\frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}\mathbb{Z}$.

Exercice 2 (sur 5 points) :

1°) (sur 4 points) Notons, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \cos^3(x)$. D'après les théorèmes usuels, f est de classe C^∞, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}$ est définie sur $\mathbb{R}$. Linéarisons $f(x)$ à l'aide des complexes : soit $x \in \mathbb{R}$.
$\cos^3(x) = \Big(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\Big)^3$, donc d'après la formule du binôme,
$\cos^3(x) = \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x))$.
On peut alors montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $R(n)$: pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}(3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2}))$.
En effet, pour $n = 0$, $\frac{1}{4}(3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2})) = \frac{1}{4}(\cos(3x) + 3\cos(x)) = f(x)$, donc $R(0)$ est vraie.
De plus, si pour $n \in \mathbb{N}$, $R(n)$ est vraie, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= \frac{d}{dx}\Big(\frac{1}{4}(3^n\cos(3x + n\frac{\pi}{2}) + 3\cos(x + n\frac{\pi}{2}))\Big) \\ &= \tfrac{1}{4}(3^{n+1}\cos(3x + (n+1)\tfrac{\pi}{2}) + 3\cos(x + (n+1)\tfrac{\pi}{2})), \end{aligned}$$

ce qui prouve $R(n+1)$.

2°) (sur 1 point)
$g(x) = \dfrac{1}{x+1} + \dfrac{1}{x-1}$, donc à nouveau par récurrence, on montre que
$g^{(n)}(x) = (-1)^n n! \Big(\dfrac{1}{(x+1)^{n+1}} + \dfrac{1}{(x-1)^{n+1}}\Big)$.

Exercice 3 (sur 3 points) :

Le dénominateur est un trinôme dont le discriminant vaut $\Delta = 4 - 4 \times 9 < 0$, donc les primitives de $x \longmapsto \dfrac{2x}{x^2+2x+9}$ sont définies sur $\mathbb{R}$. Posons $I = \displaystyle\int \frac{2x}{x^2+2x+9} dx$.
Alors $I = \displaystyle\int \frac{(2x+2)-2}{x^2+2x+9} dx = \ln(x^2+2x+9) - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+8}$,
donc $I = \ln(x^2+2x+9) - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \arctan\Big(\dfrac{x+1}{2\sqrt{2}}\Big) + k$.

Problème : Formule d'Euler-Maclaurin

Partie I (sur 15,5 points) : Les polynômes de Bernoulli

1°) (sur 4 points) Soit $x \in \mathbb{R}$.

— D'après l'énoncé, $B_0(x) = 1$.

— Ainsi, $\displaystyle\int_0^x B_0(t)\, dt = x$, puis $\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^u B_0(t)\, dt\Big)\, du = \int_0^1 u\, du = \frac{1}{2}$,
donc $\boxed{B_1(x) = x - \frac{1}{2}}$.

— Ainsi, $2\displaystyle\int_0^x B_1(t)\, dt = x^2 - x$,
puis $2\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^u B_1(t)\, dt\Big)\, du = \int_0^1 (u^2 - u)\, du = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$,
donc $\boxed{B_2(x) = x^2 - x + \frac{1}{6}}$.

— Ainsi, $3\displaystyle\int_0^x B_2(t)\, dt = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x$,
puis $3\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^u B_2(t)\, dt\Big)\, du = \int_0^1 (u^3 - \frac{3}{2}u^2 + \frac{1}{2}u)\, du = \frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0$,
donc $\boxed{B_3(x) = x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x}$.

— Ainsi, $4\displaystyle\int_0^x B_3(t)\, dt = x^4 - 2x^3 + x^2$, puis
$4\displaystyle\int_0^1 \Big(\int_0^u B_3(t)\, dt\Big)\, du = \int_0^1 (u^4 - 2u^3 + u^2)\, du = \frac{1}{5} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{6 - 15 + 10}{30} = \frac{1}{30}$,

donc $\boxed{B_4(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}}$.

2°) (sur 1 point) Posons $R(n)$ l'assertion suivante : B_n est un polynôme de degré n.
$B_0 = 1$, donc $R(0)$ est vraie.
Supposons que $n \in \mathbb{N}$ et que $R(n)$ est vraie.
Pour tout $k \in \mathbb{N}$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\int_0^x t^k\ dt = \frac{x^{k+1}}{k+1}$, donc d'après $R(n)$,
$x \longmapsto \int_0^x B_n(t)\ dt$ est un polynôme de degré $n+1$.
Or $B_{n+1}(x) = (n+1)\int_0^x B_n(t)\ dt + C$, où C est une constante indépendante de x, donc B_{n+1} est un polynôme de degré $n+1$.

3°) (sur 1,5 points) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après l'énoncé,
$B_n(x) = n\int_0^x B_{n-1}(t)\ dt - C$, où $C = n\int_0^1 \Big(\int_0^u B_{n-1}(t)\ dt\Big)\ du$.
Ainsi, $\int_0^1 B_n(x)\ dx = n\int_0^1 \Big(\int_0^x B_{n-1}(t)\ dt\Big)\ du - C = C - C = 0$.

4°)
◇ (sur 4 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante :
pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$.
$B_0 = 1$, donc $R(0)$ est vraie.
$B_1 = (x \longmapsto x - \frac{1}{2})$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B_1(1-x) = \frac{1}{2} - x = -B_1(x)$, ce qui prouve $R(1)$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $R(n)$ est vraie.
Soit $x \in \mathbb{R}$. D'après l'énoncé,
$B_{n+1}(1-x) = (n+1)\int_0^{1-x} B_n(t)\ dt - C$ où $C = (n+1)\int_0^1 \Big(\int_0^u B_n(t)\ dt\Big)\ du$.
En posant $u = 1-t$, on obtient que $\int_0^{1-x} B_n(t)\ dt = \int_1^x B_n(1-u)(-du)$, donc d'après $R(n)$, $\int_0^{1-x} B_n(t)\ dt = (-1)^{n+1}\int_1^x B_n(u)\ du$, puis d'après la question 3, sachant que $n \in \mathbb{N}^*$, $\int_0^{1-x} B_n(t)\ dt = (-1)^{n+1}\Big(\int_1^x B_n(u)\ du + \int_0^1 B_n(u)\ du\Big)$, puis d'après la relation de Chasles, $\int_0^{1-x} B_n(t)\ dt = (-1)^{n+1}\int_0^x B_n(u)\ du$.
Ainsi, $B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}(n+1)\int_0^x B_n(t)\ dt - C$.
Si n est impair, alors $(-1)^{n+1} = 1$,
donc $B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}((n+1)\int_0^x B_n(t)\ dt - C) = (-1)^{n+1}B_{n+1}(x)$.
Supposons maintenant que n est pair.

Alors $B_{n+1}(1-x) = -(n+1)\displaystyle\int_0^x B_n(t)\ dt - C = -B_{n+1}(x) - 2C$.

On en déduit que $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(1-x)\ dx = -\int_0^1 B_{n+1}(x)\ dx - 2C$.

Or en posant $u = 1-x$, $\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(1-x)\ dx = \int_1^0 B_{n+1}(u)(-du) = \int_0^1 B_{n+1}(u)\ du$,

donc $-2C = 2\displaystyle\int_0^1 B_{n+1}(x)\ dx = 0$, d'après la question précédente. Ainsi, $C = 0$

et on a encore $B_{n+1}(1-x) = (-1)^{n+1}((n+1)\displaystyle\int_0^x B_n(t)\ dt - C) = (-1)^{n+1}B_{n+1}(x)$, ce qui prouve $R(n+1)$ dans tous les cas.

$\diamond$ (sur 3 points)

Supposons d'abord que n est pair. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $B_n(1-t) = B_n(t)$, donc en remplaçant t par $\frac{1}{2} - x$, on obtient que $B_n(\frac{1}{2} + x) = B_n(\frac{1}{2} - x)$, ce qui prouve que le graphe de B_n est symétrique par rapport à la droite verticale d'équation $x = \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que n est impair. Alors $B_n(\frac{1}{2} + x) = -B_n(\frac{1}{2} - x)$, donc les deux points du graphe de B_n, de coordonnées $(\frac{1}{2} - x, B_n(\frac{1}{2} - x))$ et $(\frac{1}{2} + x, B_n(\frac{1}{2} + x))$, ont constamment pour milieu le point de coordonnées $(\frac{1}{2}, 0)$. Ainsi, le graphe de B_n est symétrique par rapport à ce dernier point.

5°) (sur 1 point)

Soit $n \geq 2$. D'après l'énoncé, B_n est dérivable et $B'_n = nB_{n-1}$, or $n-1 \geq 1$, donc d'après la question 3, $0 = n\displaystyle\int_0^1 B_{n-1}(t)\ dt = \int_0^1 B'_n(t)\ dt = B_n(1) - B_n(0)$. Ceci démontre que $B_n(1) = B_n(0) = b_n$.

6°) (sur 1 point) On a en fait déjà montré cette propriété au sein de la récurrence de la question 4, lorsqu'on a prouvé que $C = 0$ dans le cas où n était pair. On peut aussi écrire :

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après la question 4,

$B_{2n+1}(1) = B_{2n+1}(1-0) = (-1)^{2n+1}B_{2n+1}(0) = -b_{2n+1}$, or d'après la question précédente, $B_{2n+1}(1) = b_{2n+1}$, car $2n+1 \geq 2$. Ainsi, $b_{2n+1} = -b_{2n+1}$, donc $b_{2n+1} = 0$.

Partie II (sur 20 points) : la formule d'Euler-Maclaurin

7°) (sur 2 points) $B'_1 = 1$, donc B_1 est une primitive de 1. Ainsi, par intégration par parties, $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = [f(t)B_1(t)]_0^1 - \int_0^1 f'(t)B_1(t)\ dt$. Or $B_1(t) = t - \frac{1}{2}$, donc $B_1(0) = -\frac{1}{2}$ et $B_1(1) = \frac{1}{2}$. Ainsi, on a montré que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \int_0^1 f'(t)B_1(t)\ dt$.

8°) (sur 3 points) Notons $R(n)$ la propriété de l'énoncé. D'après la question précédente, $R(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $R(n)$ et on montre $R(n+1)$. En intégrant par parties, sachant que $\dfrac{B_{2n+2}}{2n+2}$ est une primitive de B_{2n+1},

$\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t)\ dt = \Big[f^{(2n+1)}(t)\frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2}\Big]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t)\frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2}\ dt.$
Or $B_{2n+2}(1) = B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$, car $2n+2 \geq 2$, donc
$\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t)\ dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2}(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \int_0^1 f^{(2n+2)}(t)\frac{B_{2n+2}(t)}{2n+2}\ dt.$
Une nouvelle intégration par parties donne
$\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t)\ dt = \Big[f^{(2n+2)}(t)\frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3}\Big]_0^1 - \int_0^1 f^{(2n+3)}(t)\frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3}\ dt.$
Or $B_{2n+3}(1) = B_{2n+3}(0) = 0$, d'après la question 6. Ainsi,
$\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t)\ dt = -\int_0^1 f^{(2n+3)}(t)\frac{B_{2n+3}(t)}{2n+3}\ dt.$
En combinant ces deux calculs, on obtient
$\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+1)}(t)B_{2n+1}(t)\ dt = \frac{b_{2n+2}}{2n+2}(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \int_0^1 f^{(2n+3)}(t)\frac{B_{2n+3}(t)}{(2n+2)(2n+3)}\ dt.$
Alors, d'après $R(n)$,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\ dt = &\ \frac{1}{2}(f(0)+f(1)) - \sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!}\\ &-\frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!}(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) - \frac{1}{(2n+3)!}\int_0^1 f^{(2n+3)}(t)B_{2n+3}(t)\ dt,\end{aligned}$$

ce qui démontre $R(n+1)$.
Le principe de récurrence permet de conclure.

9°) (sur 4 points) $B'_{2n+2}(x) = (2n+2)B_{2n+1}(x)$. Ainsi, $B'_{2n+2}(x)$ est de signe constant $]0, \frac{1}{2}[$, donc par continuité, $B'_{2n+2}(x)$ est de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$ et s'annule au plus en 0 et en $\frac{1}{2}$. Ainsi, d'après le cours, B_{2n+2} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$. Elle s'annule donc au plus une fois sur $]0, \frac{1}{2}[$. De plus, si elle ne s'annulait pas sur $]0, \frac{1}{2}[$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, elle serait de signe constant sur $]0, \frac{1}{2}[$, puis par continuité sur $[0, \frac{1}{2}]$. Mais nous allons montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t)\ dt = 0$, or B_{2n+2} est continue, donc si elle était de signe constant sur $[0, \frac{1}{2}]$, B_{2n+2} serait identiquement nulle sur $[0, \frac{1}{2}]$, ce qui est faux car c'est un polynôme de degré $2n+2$. Ainsi B_{2n+2} s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$ ... si l'on montre que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t)\ dt = 0$:
en posant $x = 1-t$, on obtient $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t)\ dt = \int_1^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(1-x)(-dx)$, donc d'après la question 4, $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t)\ dt = \int_{\frac{1}{2}}^1 B_{2n+2}(x)\ dx$.

On en déduit que $\displaystyle 0 = \int_0^1 B_{2n+2}(t)\ dt = 2\int_0^{\frac{1}{2}} B_{2n+2}(t)\ dt$.

10°) (sur 2 points) Notons à nouveau $R(n)$ la propriété de l'énoncé et démontrons-la par récurrence.
$B_1(x) = x - \frac{1}{2}$, donc B_1 est strictement négatif sur $]0, \frac{1}{2}[$.

Alors d'après la question 9 avec $n = 0$, B_2 est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et B_2 s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$, donc $R(0)$ est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $R(n)$.
Supposons d'abord que B_{2n+2} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ et notons c l'unique réel de $]0, \frac{1}{2}[$ tel que $B_{2n+2}(c) = 0$. Ainsi, $B_{2n+2}(x)$ est strictement négatif sur $[0, c[$ et strictement positif sur $]c, \frac{1}{2}]$. Or $B'_{2n+3} = (2n + 3)B_{2n+2}$, donc B_{2n+3} est strictement décroissante sur $[0, c]$, avec $B_{2n+3}(0) = b_{2n+3} = 0$ d'après la question 6, puis elle est strictement croissante sur $[c, \frac{1}{2}]$, avec $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = 0$, car d'après la question 4, $B_{2n+3}(\frac{1}{2}) = (-1)^{2n+3}B_{2n+3}(1 - \frac{1}{2}) = -B_{2n+3}(\frac{1}{2})$.
Ainsi, B_{2n+3} est strictement négative sur $]0, \frac{1}{2}[$.
Dans l'autre cas, lorsque B_{2n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$, en adaptant le raisonnement précédent, on montre que B_{2n+3} est strictement positive sur $]0, \frac{1}{2}[$.
Alors d'après la question 9, on en déduit que B_{2n+4} est strictement monotone sur $[0, \frac{1}{2}]$ et que B_{2n+4} s'annule une unique fois sur $]0, \frac{1}{2}[$, ce qui prouve $R(n + 1)$.

11°) (sur 3 points)
g étant continue sur le segment $[0, 1]$, elle est bornée et elle atteint ses bornes. Il existe donc $m, M \in [0, 1]$ tels que, pour tout $t \in [0, 1]$, $g(m) \leq g(t) \leq g(M)$.
Soit $t \in [0, 1]$. $h(t) \geq 0$, donc $g(m)h(t) \leq g(t)h(t) \leq g(M)h(t)$. Par croissance de l'intégrale, on en déduit que $g(m) \int_0^1 h(t)\ dt \leq \int_0^1 g(t)h(t)\ dt \leq g(M) \int_0^1 h(t)\ dt$.
Premier cas : si $\int_0^1 h(t)\ dt = 0$, alors d'après l'encadrement précédent, $\int_0^1 g(t)h(t)\ dt = 0$, et on peut écrire $\int_0^1 g(t)h(t)\ dt = g(\frac{1}{2}) \int_0^1 h(t)\ dt$.
Second cas : si $\int_0^1 h(t)\ dt \neq 0$, alors h étant positive, $\int_0^1 h(t)\ dt > 0$, donc l'encadrement devient $g(m) \leq \dfrac{\int_0^1 g(t)h(t)\ dt}{\int_0^1 h(t)\ dt} \leq g(M)$. Alors le théorème des valeurs intermédiaires, valable ici car g est continue, permet de conclure.

12°) (sur 6 points) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si l'on reprend la démonstration de la question 8, on voit qu'à partir de $R(n)$, après la première intégration par parties, on a montré que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f(t)\ dt &= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!} \\
&\quad - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!}(f^{(2n+1)}(1) - f^{(2n+1)}(0)) + \frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)B_{2n+2}(t)\ dt \\
&= \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^{n}(f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0))\frac{b_{2k}}{(2k)!} \\
&\quad + \frac{1}{(2n+2)!}\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2})\ dt.
\end{aligned}$$

Supposons que B_{2n+2} est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Alors, pour tout $x \in [0, \frac{1}{2}]$, $B_{2n+2}(x) \geq B_{2n+2}(0) = b_{2n+2}$.
De plus si $x \in [\frac{1}{2}, 1]$, $1 - x \in [0, \frac{1}{2}]$,
donc $B_{2n+2}(x) = (-1)^{2n+2} B_{2n+2}(1 - x) = B_{2n+2}(1 - x) \geq b_{2n+2}$,
donc $x \longmapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est positive sur $[0, 1]$.
D'après la question 10, dans l'autre cas, B_{2n+2} est strictement décroissante sur $[0, \frac{1}{2}]$. Alors un raisonnement similaire montre que $x \longmapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est négative sur $[0, 1]$.
En question 11, le résultat est encore valable lorsque h est négative sur $[0, 1]$, car il suffit d'appliquer la question 11 avec $-h$. Or on a vu que dans tous les cas,
$x \longmapsto B_{2n+2}(x) - b_{2n+2}$ est de signe constant sur $[0, 1]$, donc d'après la question 11 généralisée, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2})\ dt = f^{(2n+2)}(c) \int_0^1 (B_{2n+2}(t) - b_{2n+2})\ dt.$$

D'autre part, d'après la question 3,) $\displaystyle\int_0^1 B_{2n+2}(t)\ dt = 0$,

donc $\displaystyle\int_0^1 f^{(2n+2)}(t)(B_{2n+2}(t) - b_{2n+2})\ dt = -b_{2n+2} f^{(2n+2)}(c)$.

On a donc montré qu'il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(t)\ dt = \ & \frac{1}{2}(f(0) + f(1)) - \sum_{k=1}^{n} (f^{(2k-1)}(1) - f^{(2k-1)}(0)) \frac{b_{2k}}{(2k)!} \\ & - \frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!} f^{(2n+2)}(c).\end{aligned}$$

Partie III (sur 13,5 points) :

Développement asymptotique de $\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}$.

13°) (sur 1 point)
Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $R(n)$ l'assertion suivante : $\displaystyle\frac{d^n}{dt^n}\Big(\frac{1}{t+a}\Big) = \frac{(-1)^n n!}{(t+a)^{n+1}}$.
On vérifie facilement $R(0)$ et $R(n) \Longrightarrow R(n+1)$, donc $R(n)$ est vraie d'après le principe de récurrence.

14°) (sur 1,5 points) Soit $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}$. Appliquons la question 12 avec la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t+p}$, qui est bien de classe C^∞ sur $[0, 1]$.

On calcule $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ dt = [\ln(t+p)]_0^1 = \ln(p+1) - \ln p$, donc d'après la question précédente, il existe $c \in [0, 1]$ tel que

$$\begin{aligned}
\ln(p+1)-\ln p &= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)!}{(p+1)^{2k}}-\frac{(-1)^{2k-1}(2k-1)!}{p^{2k}}\Big)\frac{b_{2k}}{(2k)!}\\
&\quad -\frac{b_{2n+2}}{(2n+2)!}\frac{(-1)^{2n+2}(2n+2)!}{(c+p)^{2n+3}}.\\
&= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p}+\frac{1}{p+1}\Big)+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{(p+1)^{2k}}-\frac{1}{p^{2k}}\Big)\frac{b_{2k}}{2k}\\
&\quad -\frac{b_{2n+2}}{(c+p)^{2n+3}},
\end{aligned}$$

ce qui conclut en posant $c_{p,n}=c+p\in[p,p+1]$.

15°) (sur 2 points) Soit $N\in\mathbb{N}^*$ et $n\in\mathbb{N}$. Sommons la relation de la question précédente lorsque p varie de 1 à $N-1$.

$\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1}(\ln(p+1)-\ln p)=\sum_{p=2}^{N}\ln p-\sum_{p=1}^{N-1}\ln p=\ln N-\ln 1=\ln N$. De plus,

$\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1}\Big(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p}\Big)=\sum_{p=2}^{N}\frac{1}{p}+\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{p}=2\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}-1-\frac{1}{N}$,

donc $\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{p+1}+\frac{1}{p}\Big)=\Big(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\Big)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}$.

Ensuite, par commutativité de l'addition,

$\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1}\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{(p+1)^{2k}}-\frac{1}{p^{2k}}\Big)\frac{b_{2k}}{2k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}}{2k}\sum_{p=1}^{N-1}\Big(\frac{1}{(p+1)^{2k}}-\frac{1}{p^{2k}}\Big)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{2k}}{2k}\Big(\frac{1}{N^{2k}}-1\Big)$,

donc on obtient bien $\displaystyle\ln N=\Big(\sum_{p=1}^{N}\frac{1}{p}\Big)-\frac{1}{2}-\frac{1}{2N}+\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{N^{2k}}-1\Big)\frac{b_{2k}}{2k}-b_{2n+2}\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}$.

16°)

◇ (sur 1 point) Pour tout $t\in[p-1,p]$, $c_{p,n}\geq t$, donc $\displaystyle\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}\leq\frac{1}{t^{2n+3}}$. Alors, en intégrant entre $p-1$ et p, on en déduit que $\displaystyle 0\leq\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{dt}{t^{2n+3}}$.

◇ (sur 3 points) À l'aide de la relation de Chasles, on en déduit que, pour tout $\displaystyle N\geq 3,\ 0\leq\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}\leq\frac{1}{c_1^{2n+3}}+\int_1^{N-1}\frac{dt}{t^{2n+3}}\leq 1+\Big[\frac{t^{-2n-2}}{-2n-2}\Big]_1^{N-1}\leq 1+\frac{1}{2n+2}$.

Ceci démontre que la suite $\displaystyle\Big(\sum_{p=1}^{N-1}\frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}\Big)_{N\geq 3}$ est majorée, or elle est croissante, donc elle converge vers un réel que l'on peut noter S_n.

◇ (sur 3 points) Soit $N\geq 2$. Soit $M\in\mathbb{N}$ tel que $M\geq N$.

$$0 \leq \sum_{p=1}^{M} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} = \sum_{p=N}^{M} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \quad \leq \int_{N-1}^{M} \frac{dt}{t^{2n+3}} = \left[\frac{t^{-2n-2}}{-2n-2}\right]_{N-1}^{M}$$
$$\leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}.$$

En faisant tendre M vers $+\infty$, on en déduit que $0 \leq S_n - \displaystyle\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} \leq \frac{1}{(2n+2)(N-1)^{2n+2}}$.

17°) (sur 2 points) D'après la question 15,

$$\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} \quad = \ln N + \frac{1}{2} + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^{n} \Big(\frac{1}{N^{2k}} - 1\Big) \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} \sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}}$$
$$= \ln N + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + b_{2n+2}\Big(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n\Big) + \gamma_n,$$

en posant $\gamma_n = \dfrac{1}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{2k} + b_{2n+2} S_n$.

Fixons $n \in \mathbb{N}$. On a

$\Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p}\Big) - \ln N = \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + b_{2n+2}\Big(\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n\Big) + \gamma_n \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma_n$, donc

$\gamma_n = \displaystyle\lim_{N\to+\infty} \Big(\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} - \ln N\Big)$. Ceci prouve que γ_n ne dépend pas de n. On notera γ cette constante indépendante de n et de N. Ainsi,

$\displaystyle\sum_{p=1}^{N} \frac{1}{p} = \ln N + \gamma + \frac{1}{2N} - \sum_{k=1}^{n} \frac{b_{2k}}{2kN^{2k}} + \frac{b_{2n+2}}{2n+2} R_{n,N}$, avec $R_{n,N} = (2n+2)\Big(\displaystyle\sum_{p=1}^{N-1} \frac{1}{c_{p,n}^{2n+3}} - S_n\Big)$.

D'après la question précédente, $|R_{n,N}| \leq \dfrac{1}{(N-1)^{2n+2}}$