DM 12 : Enoncé
INT 1986 (adapté)

Notations : Dans tout le problème, les lettres n et p désignent des entiers strictement positifs et la lettre k désigne un entier de signe quelconque.
Les lettres t et x désignent des variables réelles.

Partie I :

1°) On pose, pour tout réel t, non multiple de π

$$f_n(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin t}.$$

Montrer que la fonction f_n peut être prolongée par continuité à $\mathbb{R}$ en entier. Ce prolongement sera noté également f_n dans ce qui suit. On précisera la valeur de $f_n(k\pi)$.

2°) Exprimer f_n sous la forme d'une somme finie d'exponentielles, puis sous la forme d'une somme finie de fonctions de la trigonométrie circulaire.
En déduire la valeur de l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(t)\ dt$.
On distinguera le cas où n est pair du cas où n est impair.

3°) Démontrer que $I_{2n+1} - I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.
a) Prouver la convergence de la série de terme général u_n.
b) Utiliser les résultats des questions précédentes pour calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$.

5°) Montrer que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on peut écrire

$$f_n^2(t) = \sum_{k=-n+1}^{n-1} \lambda_{n,k} e^{2ikt}$$

et déterminer les nombres $\lambda_{n,k}$.

6°) Soit p un entier strictement positif ; On pose

$$J_{n,p} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n^{2p}(t)\ dt.$$

a) Calculer $J_{n,p}$ lorsque $p = 1$ et $p = 2$.

b) Montrer que pour tout entier $n > 0$ et tout entier $p > 0$, $J_{n,p} \geq \left(\frac{2n}{\pi}\right)^{2p-1}$.

Partie II :

Dans toute cette partie et dans toute la suite, f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs complexes, périodique de période 2π et pourvue d'une dérivée continue.

1°) Lorsque $\delta \in \mathbb{R}_+^*$, on note $A(\delta) = \{|f(x) - f(y)| / (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ et } |x - y| \leq \delta\}$.
Montrer que l'on peut définir le réel $\omega(\delta) = \sup(A(\delta))$.
Montrer qu'il existe une constante $K \geq 0$ telle que pour tout $\delta > 0$, $\omega(\delta) \leq K\delta$.

2°) Montrer que la fonction ω est croissante.

3°) Soit $\delta > 0$ et soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.
En déduire que pour tout $\lambda > 0$, $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.
En déduire que pour tout entier n et tout $t > 0$, $\omega(2t) \leq (2nt + 1)\omega(\frac{1}{n})$.

4°) Montrer que $\omega(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie III :

1°) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}$, $|\sin(nt)| \leq n|\sin t|$.

2°) Pour tout $p > 1$, on pose $K_{n,p} = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t)\ dt$.

En décomposant cette intégrale de 0 à $\frac{\pi}{2}$ sous la forme $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} = \int_0^{\frac{\pi}{2n}} + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}$, montrer que $K_{n,p} \leq \dfrac{\pi^2}{8(p-1)}(pn^{2p-2} - 1)$.

Partie IV :

On pose $U_{n,p}(x) = \dfrac{1}{4J_{n,p}} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t) \times f_n^{2p}\left(\frac{t-x}{2}\right)\ dt$.

1°) Vérifier que $U_{n,p}$ est un polynôme trigonométrique, c'est-à-dire une application de la forme

$$U_{n,p}(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

où $N \in \mathbb{N}^*$ et où a_0, a_k et b_k désignent des nombres complexes que l'on ne cherchera pas à calculer.

2°) Etablir l'égalité

$$U_{n,p}(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t)) f_n^{2p}(t)\ dt.$$

Qu'obtient-on lorsque f est la fonction constante égale à 1 ?
En déduire que

$$U_{n,p}(x) - f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)) f_n^{2p}(t)\ dt.$$

3°) Montrer qu'il existe un nombre $M(p)$ tel que pour tout entier $n > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$|f(x) - U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega(\frac{1}{n}).$$

Vérifier en particulier que $M(2) = 6$ convient.
En déduire que, pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, la suite d'applications $(U_{n,p})_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire que $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - U_{n,p}(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.