DM 12 : corrigé

Partie I :

1°) D'après les théorèmes usuels, f_n est continue sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$.
Fixons $k \in \mathbb{Z}$. Lorsque t est au voisinage de $k\pi$,
$\sin(t) = (-1)^k \sin(t - k\pi) \sim (-1)^k(t - k\pi)$
et $\sin(nt) = (-1)^{nk} \sin(n(t - k\pi)) \sim (-1)^{nk} n(t - k\pi)$,
donc $\dfrac{\sin(nt)}{\sin(t)} \underset{t \to k\pi}{\longrightarrow} (-1)^{(n-1)k} n$. Ainsi,
en posant pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $f_n(k\pi) = (-1)^{(n-1)k} n$, f_n est continue sur $\mathbb{R}$ en entier.

2°)

◇ Fixons t dans $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$. $f_n(t) = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \dfrac{e^{int}}{e^{it}} . \dfrac{1 - (e^{-2it})^n}{1 - e^{-2it}} = e^{i(n-1)t} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{-2ikt}$.

Ainsi, $f_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-2k-1)t}$.

Les applications intervenant de chaque côté de cette égalité sont continues sur $\mathbb{R}$ et elles coïncident sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ (car tout réel est limite d'une suite d'éléments de $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$), donc d'après le cours, ces deux applications coïncident sur $\mathbb{R}$ en entier.

◇ En passant à la partie réelle et en tenant compte du fait que par définition, $f_n(t) \in \mathbb{R}$, on obtient $f_n(t) = \mathrm{Re}(f_n(t)) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \cos((n - 2k - 1)t)$.

◇ Premier cas : supposons que n est pair. On pose alors $n = 2m$.
Pour tout $k \in \{0, \ldots, n - 1\}$, $n - 2k - 1 \neq 0$, donc
$\displaystyle\int_0^{\pi/2} f_n(t)dt = \sum_{k=0}^{n-1} \Big[\frac{\sin((2(m-k)-1)t)}{2(m-k)-1}\Big]_0^{\pi/2} = \sum_{k=0}^{2m-1} \frac{(-1)^{m-k+1}}{2(m-k)-1}$.

Ainsi $I_{2m} = \displaystyle\sum_{k=-m+1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \sum_{h=1}^{m-1} \frac{(-1)^{h-1}}{-2h-1}$ (on a posé $h = -k$ dans la seconde somme). Donc $I_{2m} = 1 + 1 + \displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1} + \sum_{k=2}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$ (en posant $k = h + 1$).

Finalement $I_{2m} = 2 \displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

$\diamond$ Second cas : supposons que n est impair. On pose alors $n = 2m + 1$.

$I_{2m+1} = \dfrac{\pi}{2} + \displaystyle\sum_{\substack{k=0\\k\neq m}}^{2m} \Big[\frac{\sin((2m-2k)t)}{2m-2k}\Big]_0^{\pi/2}$, donc $I_{2m+1} = \dfrac{\pi}{2}$.

3°) Soit $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$. $f_{2n+1}(t) - f_{2n}(t) = \dfrac{\sin((2n+1)t) - \sin(2nt)}{\sin(t)} = \cos(2nt) + \sin(2nt)\dfrac{\cos(t)-1}{\sin(t)}$,
or $\cos(t) - 1 = -2(\sin\frac{t}{2})^2$ et $\sin(t) = 2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}$,
donc $f_{2n+1}(t) - f_{2n}(t) = \cos(2nt) - \tan\frac{t}{2}\sin(2nt)$.
A nouveau par densité, cette égalité est encore valable pour $t = 0$, donc
$I_{2n+1} - I_{2n} = \Big[\dfrac{\sin(2nt)}{2n}\Big]_0^{\pi/2} - \displaystyle\int_0^{\pi/2} \tan\frac{t}{2}\sin(2nt)dt$. Intégrons par parties :

$$\begin{aligned} I_{2n+1} - I_{2n} &= \Big[\frac{\cos(2nt)}{2n}\tan\frac{t}{2}\Big]_0^{\pi/2} - \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(2nt)}{2n}(1 + (\tan\frac{t}{2})^2).\frac{1}{2}dt \\ &= \frac{(-1)^n}{2n} - \frac{1}{2n}\int_0^{\pi/2} \cos(2nt)(1 + (\tan\frac{t}{2})^2).\frac{1}{2}dt, \end{aligned}$$

or par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \Big|\int_0^{\pi/2} \cos(2nt)(1 + (\tan\frac{t}{2})^2).\frac{1}{2}dt\Big| &\leq \int_0^{\pi/2} |\cos(2nt)|.|1 + (\tan\frac{t}{2})^2|.\frac{1}{2}dt \\ &\leq \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}(1+1)dt = \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

donc par inégalité triangulaire, $|I_{2n+1} - I_{2n}| \leq \dfrac{1}{2n} + \dfrac{1}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Ainsi, d'après le principe des gendarmes, $I_{2n+1} - I_{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

4°)

a) La suite $\left(\dfrac{1}{2n-1}\right)_{n\geq 1}$ tend vers 0 en décroissant, donc la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est spéciale alternée : elle converge d'après le théorème des séries alternées.

b) Posons $v_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k$. D'après le premier cas de la seconde question, $v_n = \frac{1}{2}I_{2n}$, donc

$v_n = \frac{1}{2}I_{2n+1} + \frac{1}{2}(I_{2n} - I_{2n+1}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi}{4}$. Ainsi, $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = \frac{\pi}{4}$.

5°) D'après la question 2, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$f_n^2(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\sum_{h=0}^{n-1} e^{i(2n-2-2(h+k))t} = \sum_{\alpha=0}^{2n-2}\sum_{\substack{0\leq h,k\leq n-1\\h+k=\alpha}} e^{i(2n-2-2\alpha)t}$.

Soit $\alpha \in \mathbb{N}$. Notons $A(\alpha) = \{(h,k) \in \{0,\ldots,n-1\}^2 / h + k = \alpha\}$.

- Si $\alpha > 2n-2$, $A(\alpha) = \emptyset$.
- Supposons que $0 \leq \alpha \leq n-1$: soit $(h,k) \in A(\alpha)$. Alors $h \leq \alpha$, $k \leq \alpha$ et $h = \alpha - k$. La réciproque étant claire, $A(\alpha) = \{(\alpha - k, k)/0 \leq k \leq \alpha\}$, donc $\mathrm{Card}(A(\alpha)) = \alpha + 1$.

— Si $n \leq \alpha \leq 2n-2$,

$$\begin{aligned}(h,k) \in A(\alpha) &\iff (n-1-h)+(n-1-k) = 2n-2-\alpha \\ &\iff (n-1-h, n-1-k) \in A(2n-2-\alpha),\end{aligned}$$

or $2n-2-\alpha \in \{0,\ldots,n-2\}$, donc d'après le cas précédent,
$\mathrm{Card}(A(\alpha)) = \mathrm{Card}(A(2n-2-\alpha)) = 2n-1-\alpha$.

Ainsi,

$$\begin{aligned} f_n^2(t) &= \sum_{\alpha=0}^{n-1}(\alpha+1)e^{2it(n-1-\alpha)} + \sum_{\alpha=n}^{2n-2}(2n-1-\alpha)e^{2it(n-1-\alpha)} \\ &= \sum_{\alpha=0}^{n-1}(n-\alpha)e^{2it\alpha} + \sum_{\alpha=-n+1}^{-1}(n+\alpha)e^{2it\alpha}.\end{aligned}$$

On a montré que $f_n^2(t) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)e^{2itk}$.

6°)

a) $\diamond$ f_n^2 étant à valeurs réelles, $J_{n,1} = Re(J_{n,1}) = \displaystyle\int_0^{\pi/2} Re(f_n^2(t))dt$,

donc $J_{n,1} = \displaystyle\sum_{\substack{k=-n+1 \\ k\neq 0}}^{n-1}(n-|k|)\left[\frac{\sin(2tk)}{2k}\right]_0^{\pi/2} + n\frac{\pi}{2}$, donc $J_{n,1} = n\dfrac{\pi}{2}$.

$\diamond$ $f_n^4(t) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1}\sum_{h=-n+1}^{n-1}(n-|k|)(n-|h|)e^{2it(k+h)}$,

donc $f_n^4(t) = \displaystyle\sum_{\alpha=-2n+2}^{2n-2}\Bigg(\sum_{\substack{-n+1\leq h,k\leq n-1 \\ h+k=\alpha}}(n-|k|)(n-|h|)e^{2it\alpha}\Bigg)$, donc il existe une famille $(\mu_\alpha)_{-2n+2\leq k\leq 2n-2}$ de réels telle que, pour tout $t\in\mathbb{R}$, $f_n^4(t) = \displaystyle\sum_{\alpha=-2n+2}^{2n-2}\mu_\alpha e^{2it\alpha}$.

Un calcul similaire au précédent montre alors que $J_{n,2} = \mu_0\dfrac{\pi}{2}$,

or $\mu_0 = \displaystyle\sum_{\substack{-n+1\leq h,k\leq n-1 \\ h+k=0}}(n-|k|)(n-|h|) = \sum_{k=-n+1}^{n-1}(n-|k|)^2$, donc

$\mu_0 = n^2 + 2\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)^2 = n^2+2\sum_{k=1}^{n-1}k^2$, puis d'après le cours, $\mu_0 = n^2+2\dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$,

donc $J_{n,2} = \dfrac{\pi}{6}n(2n^2+1)$.

b) $\diamond$ Pour $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$, posons $f(t) = \sin(t) - \dfrac{2t}{\pi}$.

$f'(t) = \cos(t) - \dfrac{2}{\pi}$, donc $f'(t) = 0 \iff t = \mathrm{Acos}(\frac{2}{\pi})$.

Ainsi, en posant $t_0 = \mathrm{Acos}(\frac{2}{\pi})$, f est croissante sur $[0,t_0]$ avec $f(0)=0$, puis elle est décroissante sur $[t_0,\frac{\pi}{2}]$, avec $f(\frac{\pi}{2}) = 0$.

Ainsi, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f(t) \geq 0$: $\sin(t) \geq \dfrac{2t}{\pi}$.

$\diamond$ Ainsi, pour tout $t \in]0, \dfrac{\pi}{2n}]$, $\sin(nt) \geq \dfrac{2nt}{\pi}$, donc $f_n^{2p}(t) \geq \left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2p} \dfrac{t^{2p}}{\sin^{2p}(t)}$, or $\sin t \leq t$ (se démontre en étudiant la fonction $t \longmapsto t - \sin(t)$, de dérivée $1 - \cos(t) \geq 0$), donc pour tout $t \in]0, \dfrac{\pi}{2n}]$, $f_n^{2p}(t) \geq \left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2p}$.

Pour $t = 0$, on a aussi $f_n^{2p}(0) = n^{2p} \geq \left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2p}$,

donc $J_{n,p} \geq \displaystyle\int_0^{\pi/(2n)} f_n^{2p}(t)dt \geq \dfrac{\pi}{2n}\left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2p} = \left(\dfrac{2n}{\pi}\right)^{2p-1}$.

Partie II :

1°) $\diamond$ f' est définie et continue sur le compact $[0, 2\pi]$, donc f' est bornée sur $[0, 2\pi]$: il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $t \in [0, 2\pi]$, $|f'(t)| \leq K$.
f est 2π-périodique donc f' est également 2π-périodique. Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $t - 2k\pi \in [0, 2\pi[$, donc $|f'(t)| \leq K$.
$\diamond$ Soit $\delta \in \mathbb{R}_+^*$.
Soit $Z \in A(\delta)$: il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| \leq \delta$ et $Z = |f(x) - f(y)|$.
f étant de classe C^1, $Z = \left|\displaystyle\int_x^y f'(t)\ dt\right| \leq \displaystyle\int_{\min(x,y)}^{\max(x,y)} |f'(t)|\ dt \leq K|x - y| \leq K\delta$.
Ainsi, l'ensemble $A(\delta)$ est majoré, de plus il est non vide, donc d'après la propriété de la borne supérieure, $A(\delta)$ possède une borne supérieure, notée $\omega(\delta)$.
De plus on vient de montrer que $K\delta$ est un majorant de $A(\delta)$, donc par définition de la borne supérieure, $\omega(\delta) \leq K\delta$.

2°) Soit $\delta, \delta' \in \mathbb{R}_+^*$ avec $\delta \leq \delta'$. Alors $A(\delta) \subset A(\delta')$, donc $\omega(\delta) \leq \omega(\delta')$, ce qui prouve que l'application ω est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

3°) $\diamond$ Soit $Z \in A(n\delta)$: il existe $x, y \in \mathbb{R}$ tel que $|x - y| \leq n\delta$ et $Z = |f(x) - f(y)|$.
Quitte à permuter x et y, on peut supposer que $x \leq y$.
Pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, posons $x_i = x + i\dfrac{y - x}{n}$.
$Z = |f(x_0) - f(x_n)| = \left|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} [f(x_{i-1}) - f(x_i)]\right| \leq \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |f(x_{i-1}) - f(x_i)|$, or pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $|x_i - x_{i-1}| = \dfrac{|y - x|}{n} \leq \delta$, donc $|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \in A(\delta)$
et $|f(x_{i-1}) - f(x_i)| \leq \omega(\delta)$. Ainsi, $Z \leq n\omega(\delta)$, pour tout $Z \in A(n\delta)$.
Par passage au sup, on en déduit que $\omega(n\delta) \leq n\omega(\delta)$.
$\diamond$ Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$. Posons $n = \lfloor \lambda \rfloor$: $\lambda \leq n + 1$ et ω est croissante,
donc $\omega(\lambda\delta) \leq \omega((n + 1)\delta) \leq (n + 1)\omega(\delta)$. De plus $n \leq \lambda$, donc $\omega(\lambda\delta) \leq (\lambda + 1)\omega(\delta)$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}_+^*$. $\omega(2t) = \omega(2nt \times \frac{1}{n}) \leq (2nt + 1)\omega(\frac{1}{n})$.

4°) $0 \leq \omega(\frac{1}{n}) \leq \frac{K}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\omega(\frac{1}{n}) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

Partie III :

1°) Lorsque $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, d'après question I.2, $\dfrac{\sin(nt)}{\sin t} = f_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} e^{i(n-2k-1)t}$, donc par inégalité triangulaire, $\left|\dfrac{\sin(nt)}{\sin t}\right| \leq n$. Ainsi, pour $t \in \mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$, $|\sin(nt)| \leq n|\sin t|$ et cette inégalité est évidente lorsque $t \in \pi\mathbb{Z}$.

2°) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$.
On a vu que, pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2n}]$, $|f_n(t)| \leq n$,
donc $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t)\ dt \leq n^{2p} \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t\ dt = n^{2p}\frac{1}{2}\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)^2$, puis $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t)\ dt \leq \frac{\pi^2}{8}n^{2p-2}$.
Par ailleurs, pour tout $t \in [\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}]$, $\sin t \geq \frac{2t}{\pi}$, donc $|f_n(t)| \leq \frac{\pi}{2t}$.
Ainsi, $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t)\ dt \leq \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p} \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t^{1-2p}\ dt = \Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p}\Big[\frac{t^{2-2p}}{2-2p}\Big]_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}}$ (car $p \neq 1$). Donc

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t)\ dt &\leq \frac{1}{2-2p}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p}\Big((\frac{\pi}{2})^{2-2p} - (\frac{\pi}{2n})^{2-2p}\Big)\\
&= \frac{1}{2(p-1)}\Big((\frac{\pi}{2})^2 n^{2p-2} - (\frac{\pi}{2})^2\Big)\\
&= \frac{\pi^2}{8(p-1)}(n^{2p-2}-1). \text{ On en déduit que}\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t)\ dt &= \int_0^{\frac{\pi}{2n}} t f_n^{2p}(t)\ dt + \int_{\frac{\pi}{2n}}^{\frac{\pi}{2}} t f_n^{2p}(t)\ dt\\
&\leq \frac{\pi^2}{8}n^{2p-2} \times \frac{p-1}{p-1} + \frac{\pi^2}{8(p-1)}(n^{2p-2}-1)\cdot\\
&= \frac{\pi^2}{8(p-1)}(pn^{2p-2}-1).
\end{aligned}$$

Partie IV :

1°) D'après la question I.6.a, $J_{n,p} > 0$, donc $U_{n,p}$ est correctement défini.
Soit $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [-\pi, \pi]$. D'après la question I.5,
$f_n^2(\frac{t-x}{2}) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)e^{i(t-x)k} = e^{i(t-x)(1-n)} \sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)\Big(e^{i(t-x)}\Big)^{k+n-1}$.
Ainsi, $f_n^2(\frac{t-x}{2}) = e^{i(t-x)(1-n)}P\Big(e^{i(t-x)}\Big)$, où P est le polynôme
$P(X) = \displaystyle\sum_{k=-n+1}^{n-1} (n-|k|)X^{k+n-1}$, indépendant de x et de t.

Alors P^p est encore un polynôme que l'on écrit sous la forme $P^p(X) = \displaystyle\sum_{k=0}^{M} \alpha_k X^k$, les α_k étant indépendants de x et de t.

Ainsi, $f_n^{2p}(\frac{t-x}{2}) = e^{pi(t-x)(1-n)} \sum_{k=0}^{M} \alpha_k \Big(e^{i(t-x)}\Big)^k$. On en déduit que

$$\begin{aligned} U_{n,p}(x) &= \frac{1}{4J_{n,p}} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sum_{k=0}^{M} \alpha_k e^{i(t-x)[p(1-n)+k]}\ dt \\ &= \frac{1}{4J_{n,p}} \sum_{k=0}^{M} \alpha_k e^{ix[p(n-1)-k]} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{it[p(1-n)+k]}\ dt \\ &= \sum_{k=0}^{M} \beta_k e^{ix[p(n-1)-k]}, \end{aligned}$$

si l'on pose $\beta_k = \frac{1}{4J_{n,p}} \alpha_k \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{it[p(1-n)+k]}\ dt$, qui est indépendant de x.

Alors $U_{n,p}(x) = \sum_{k=0}^{M} \beta_k \Big(\cos([p(n-1)-k]x) + i\sin([p(n-1)-k]x)\Big)$, ce qui est bien un polynôme trigonométrique car pour tout k, $p(n-1)-k \in \mathbb{Z}$.

2°) Fixons un réel x.

◇ En posant $u = x + 2t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x+2t) f_n^{2p}(t)\ dt = \int_x^{x+\pi} f(u) f_n^{2p}(\frac{u-x}{2})\ \frac{du}{2}$ et en posant $u = x - 2t$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t) f_n^{2p}(t)\ dt = -\int_x^{x-\pi} f(u) f_n^{2p}(-\frac{u-x}{2})\ \frac{du}{2}$, or f_n est une application paire, donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x-2t) f_n^{2p}(t)\ dt = \int_{x-\pi}^{x} f(u) f_n^{2p}(\frac{u-x}{2})\ \frac{du}{2}$. Ainsi, d'après la relation de Chasles, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t)+f(x-2t)) f_n^{2p}(t)\ dt = \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(t) f_n^{2p}(\frac{t-x}{2})\ \frac{dt}{2}$.

L'application $t \longmapsto |f_n(t)|$ est π-périodique, donc $t \longmapsto f_n^{2p}(\frac{t-x}{2})$ est 2π-périodique, ainsi que l'application $t \longmapsto f(t) f_n^{2p}(\frac{t-x}{2})$,

donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t)+f(x-2t)) f_n^{2p}(t)\ dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) f_n^{2p}(\frac{t-x}{2})\ \frac{dt}{2}$.

Ainsi, $U_{n,p}(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t)+f(x-2t)) f_n^{2p}(t)\ dt$.

◇ Lorque $f = 1$, $U_{n,p}(x) = \frac{1}{J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n^{2p}(t)\ dt = 1$.

◇ Si l'on multiplie cette dernière égalité par $f(x)$,

on obtient que $f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2f(x)) f_n^{2p}(t)\ dt$,

donc $U_{n,p}(x) - f(x) = \frac{1}{2J_{n,p}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)) f_n^{2p}(t)\ dt$.

3°) Il faut supposer que $p \geq 2$, contrairement à ce qu'affirme l'énoncé.

◇ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geq 2$. Pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$, d'après la question II.3,

$|f(x+2t)-f(x)| \leq \omega(2t)$, donc $|f(x+2t)-f(x)| \leq (2nt+1)\omega(\frac{1}{n})$. De même, $|f(x-2t)-f(x)| \leq (2nt+1)\omega(\frac{1}{n})$. Ces inégalités sont encore valables lorque $t=0$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
|U_{n,p}(x)-f(x)| &\leq \frac{1}{2J_{n,p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|f_n^{2p}(t)\ dt \\
&\leq \frac{1}{2J_{n,p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (|f(x+2t)-f(x)|+|f(x-2t)-f(x)|)f_n^{2p}(t)\ dt \\
&\leq \frac{1}{J_{n,p}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2nt+1)\omega(\frac{1}{n})f_n^{2p}(t)\ dt \\
&\leq \omega(\frac{1}{n})(1+2n\frac{K_{n,p}}{J_{n,p}}) : (1).
\end{aligned}$$

D'après les questions I.6.b et III.2,

$$|U_{n,p}(x)-f(x)| \leq \omega(\frac{1}{n})\Big(1+2n\frac{\pi^2}{8(p-1)}pn^{2p-2}\times\Big(\frac{\pi}{2n}\Big)^{2p-1}\Big) = \omega(\frac{1}{n})\Big(1+\frac{p}{p-1}\Big(\frac{\pi}{2}\Big)^{2p+1}\Big).$$

Ainsi, il existe $M(p)$ tel que pour tout entier $n>0$ et tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega(\frac{1}{n})$.

$\diamond$ Reprenons l'inégalité (1) lorsque $p=2$ et utilisons la question I.6.a :

$$\begin{aligned}
|U_{n,p}(x)-f(x)| &\leq \omega(\frac{1}{n})(1+2n(\frac{\pi^2}{8}(2n^2))\times\frac{6}{\pi n(2n^2+1)}) \\
&\leq \omega(\frac{1}{n})(1+2n\frac{\pi^2}{8}\times\frac{6}{\pi n}) \\
&= \omega(\frac{1}{n})(1+\frac{3\pi}{2}) \leq 6\omega(\frac{1}{n}),
\end{aligned}$$

donc $M(2)=6$ convient.

$\diamond$ Soit $p\in\mathbb{N}$ avec $p\geq 2$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|f(x)-U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega(\frac{1}{n})$, donc par passage au sup, $0 \leq \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-U_{n,p}(x)| \leq M(p)\omega(\frac{1}{n})$, or $M(p)\omega(\frac{1}{n}) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ d'après la question II.4, donc par principe des gendarmes, $\sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)-U_{n,p}(x)| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.