DM 27

— On note $\mathcal{B}$ l'ensemble des suites bornées de complexes.
— On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des suites de complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$. On dit alors que p est une période de la suite (c_n).

Partie I :

1°) Montrer que $\mathcal{P}$ est inclus dans $\mathcal{B}$.

2°) Montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels.

3°) Pour tout $c = (c_n) \in \mathcal{B}$, on note $\|c\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_n|$.
Montrer qu'on définit ainsi une norme sur $\mathcal{B}$.

4°) Fixons une suite $c = (c_n)$ dans $\mathcal{P}$.
Montrer que c possède une plus petite période et décrire l'ensemble des périodes de c en fonction de cette plus petite période.
Déterminer cette plus petite période lorsque $c_n = \mathrm{Re}(i^{n+1})$.

5°) Montrer que $\mathcal{P}$ n'est pas de dimension finie.

Partie II :

6°) Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. Soit p une période de c et $n \in \mathbb{N}$. On pose $M(c) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k}$.

Montrer que $M(c)$ ne dépend ni de p, ni de n.
Montrer que M est une forme linéaire sur $\mathcal{P}$.

Pour toute la suite de ce problème, on posera $\mathcal{P}_0 = \mathrm{Ker}(M)$.

7°)
a) En munissant $\mathcal{P}$ de la norme définie en question 3, montrer que M est continue.

b) Calculer $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{|M(c)|}{\|c\|}$.

c) Montrer que $\mathcal{P}_0$ est un fermé de $\mathcal{P}$.

8°) Pour tout $c = (c_n) \in \mathcal{P}$, on note $D(c) = (c_{n+1} - c_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que D est un endomorphisme de $\mathcal{P}$. Déterminer $\mathrm{Ker}(D)$ et $\mathrm{Im}(D)$.

b) Montrer que D est continu et calculer $\sup\limits_{c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}} \dfrac{\|D(c)\|}{\|c\|}$.

9°) Pour tout $c = (c_n) \in \mathcal{P}_0$, on pose $I(c) = \left(\sum\limits_{k=0}^{n} c_k\right)_{n \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que I est une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

b) Est-elle continue ?

c) Déterminer le noyau et l'image de I.

Partie III :

Dans cette partie, on fixe $c = (c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et on étudie la nature de la série

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{c_n}{n^\alpha}.$$

10°) Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{c_n}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \leqslant 0$.

11°) Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{c_n}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha > 1$.

Pour toute la suite de cette partie, on suppose que $\alpha \in]0, 1]$.

12°) Déterminer la nature de $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{|c_n|}{n^\alpha}$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} c_k$.

13°)

a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{c_k}{k^\alpha} = \dfrac{S_n}{(n+1)^\alpha} - c_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} S_k \left(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} \right)$.

b) Lorsque $c \in \mathcal{P}_0$, montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{c_n}{n^\alpha}$ est convergente.

14°) Déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n \geqslant 1} \dfrac{c_n}{n^\alpha}$ lorsque $\alpha \in]0, 1]$ et que $c \notin \mathcal{P}_0$.

Partie IV :

D'après les questions précédentes, pour tout $c = (c_n) \in \mathcal{P}_0$, on peut poser

$$S(c) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c_n}{n}.$$

15°) Montrer que S est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_0$.

16°) Calculer $S(c)$ lorsque $c = (\mathrm{Re}(i^{n+1}))_{n\in\mathbb{N}}$. On pourra utiliser le fait que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\int_0^1 t^k \, dt = \frac{1}{k+1}$.

17°)

a) Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

b) Soit $p \in \mathbb{N}$ avec $p \geqslant 2$. On suppose que $c_n = 1$ lorsque n n'est pas congru à 0 modulo p et que $c_n = 1 - p$ si n est congru à 0 modulo p. Calculer $S(c)$.

Pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on pose $\displaystyle J_q = \int_0^1 \frac{1 - t^q}{(1-t)(1+t^q)} \, dt$.

18°) Montrer que J_q est correctement défini pour tout $q \in \mathbb{N}^*$ et étudier la convergence de J_q lorsque q tend vers $+\infty$.

19°) Fixons $q \in \mathbb{N}^*$. On note $d = (d_n)$ l'unique suite de réels dont $2q$ est une période et telle que $d_n = 1$ pour tout $n \in \{1, \ldots, q\}$ et $d_n = -1$ pour tout $n \in \{q+1, \ldots, 2q\}$. Montrer que $\displaystyle\sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} J_q$.

20°) S est-elle continue ?