DM 27 : un corrigé

Partie I :

1°) Soit $(c_n) \in \mathcal{P}$. Il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$.
◇ Par récurrence sur k, montrons pour tout $n, k \in \mathbb{N}$, $c_{n+kp} = c_n$:
c'est évident pour $k = 0$
et si c'est vrai pour $k \in \mathbb{N}$, alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+(k+1)p} = c_{(n+kp)+p} = c_{n+kp} = c_n$.
◇ Alors $\{c_n \ / \ n \in \mathbb{N}\} = \{c_k \ / \ k \in \{0, \ldots, p-1\}\}$: en effet, soit $n \in \mathbb{N}$. Par division euclidienne, $n = pq + r$ avec $0 \leqslant r < p$. Ainsi, $c_n = c_r \in \{c_k \ / \ k \in \{0, \ldots, p-1\}\}$. L'inclusion réciproque est évidente.
◇ Ainsi, $\{c_n \ / \ n \in \mathbb{N}\}$ est une partie finie de $\mathbb{C}$, donc elle est bornée. On a montré que $(c_n) \in \mathcal{B}$, donc $\mathcal{P} \subset \mathcal{B}$.

2°)
◇ $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ contiennent la suite identiquement nulle, donc ils sont non vides.
◇ Soit $(c_n), (d_n) \in \mathcal{B}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par hypothèse, il existe $M, M' \in \mathbb{R}_+$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_n| \leqslant M$ et $|d_n| \leqslant M'$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\alpha c_n + d_n| \leqslant |\alpha| M + M'$, donc la suite $\alpha(c_n) + (d_n)$ est encore dans $\mathcal{B}$.
◇ Soit $(c_n), (d_n) \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Par hypothèse, il existe $p, q \in \mathbb{N}^*$ tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+p} = c_n$ et $d_{n+q} = d_n$. On a vu en question précédente qu'alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+pq} = c_n$ et $d_{n+pq} = d_n$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\alpha c_{n+pq} + d_{n+pq} = \alpha c_n + d_n$, ce qui prouve que la suite $\alpha(c_n) + (d_n)$ est encore dans $\mathcal{P}$, et que pq en est une période.
◇ On a ainsi prouvé que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{P}$ sont non vides et stables par combinaisons linéaires, donc ce sont des sous-espaces vectoriels du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ (lequel est bien un $\mathbb{C}$-espace vectoriel d'après le cours).

3°) Soit $c = (c_n) \in \mathcal{B}$, $d = (d_n) \in \mathcal{B}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.
◇ Clairement $\|c\| \geqslant 0$.
◇ Supposons que $\|c\| = 0$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant |c_n| \leqslant \|c\| = 0$, donc $c_n = 0$, puis $c = 0$.
◇ Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda c_n| = |\lambda||c_n| \leqslant |\lambda|\|c\|$, donc $|\lambda|\|c\|$ est un majorant de $\{|\lambda c_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\}$, or la borne supérieure est le plus petit des majorants, donc $\|\lambda c\| = \sup\{|\lambda c_n| \ / \ n \in \mathbb{N}\} \leqslant |\lambda|\|c\|$. Par la suite, ce raisonnement sera appelé un passage à la borne supérieure.

$\diamond$ Supposons que $|\lambda| \neq 0$. Alors en appliquant le résultat précédent, mais en remplaçant (λ, c) par $(\frac{1}{\lambda}, \lambda c)$, on obtient que $\|c\| \leqslant |\frac{1}{\lambda}|\|\lambda c\|$, donc $\|\lambda c\| = |\lambda|\|c\|$. Ce résultat est évident lorsque $\lambda = 0$.
$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $|c_n + d_n| \leqslant |c_n| + |d_n| \leqslant \|c\| + \|d\|$, donc par passage à la borne supérieure, $\|c + d\| \leqslant \|c\| + \|d\|$.
$\diamond$ En conclusion, $\|.\|$ est bien une norme sur $\mathcal{B}$.

4°) $\diamond$ Notons G l'ensemble des périodes de c. Par hypothèse, G est une partie non vide de $\mathbb{N}$, donc elle possède un minimum, noté $p_c \in \mathbb{N}^*$.
$\diamond$ On a déjà vu que, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, kp_c est encore une période de c, donc $p_c\mathbb{N}^* \subset G$.
Réciproquement, soit $p \in G$.
Par division euclienne, il existe $q, r \in \mathbb{N}$ tels que $p = qp_c + r$ avec $0 \leqslant r < p_c$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{r+n} = c_{p-qp_c+n} = c_n$, donc si $r \neq 0$, alors $r \in G$, ce qui contredit la minimalité de p_c. Ainsi, $r = 0$ et $p = qp_c$, avec $q \in \mathbb{N}^*$.
En conclusion, l'ensemble des périodes de c est $p_c\mathbb{N}^*$, c'est-à-dire l'ensemble des multiples de la plus petite période.
$\diamond$ Supposons que $c_n = \mathrm{Re}(i^{n+1})$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+4} = c_n$, car $i^4 = 1$, donc 4 est une période de c.
On calcule $c_0 = 0$, $c_1 = -1$, $c_2 = 0$ et $c_3 = 1$, donc $c_0 \neq c_{0+1}$, $c_1 \neq c_{1+2}$ et $c_0 \neq c_{0+3}$.
Ainsi, $1, 2$ et 3 ne sont pas des périodes de c. Ceci prouve que 4 est la plus petite période de c.

5°) Supposons que $\mathcal{P}$ est de dimension finie. Ainsi, il existe $p \in \mathbb{N}$ et $(b_1, \ldots, b_p) \in \mathcal{P}^p$ qui vérifient : pour tout $c \in \mathcal{P}$, il existe $(\alpha_1, \ldots, \alpha_p) \in \mathbb{C}^p$ tel que $c = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \alpha_i b_i$.
On a vu en question 2 que si p est une période de $c \in \mathcal{P}$ et si q est une période de $d \in \mathcal{P}$, alors pq est une période de $\alpha c + \beta d$, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que, si $c_1, \ldots, c_k$ sont k éléments de $\mathcal{P}$, alors pour tout $(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \in \mathbb{C}^k$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} \alpha_i c_i$ admet $\displaystyle\prod_{i=1}^{k} p_i$ comme période.
Ainsi, d'après notre hypothèse, en notant q_1 une période de b_1, $\ldots$, q_p une période de b_p, pour tout $c \in \mathcal{P}$, $Q = \displaystyle\prod_{i=1}^{p} q_p \in \mathbb{N}^*$ est une période de c.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, posons $u_n = 0$ lorsque $n \not\equiv 0\ [Q+1]$ et $u_n = 1$ lorsque $n \equiv 0\ [Q+1]$.
La suite $u = (u_n)$ est périodique de période $Q+1$, donc $u \in \mathcal{P}$. Alors ce qui précède implique que Q est aussi une période de u. D'après la question 4, $(Q+1) - Q = 1$ est aussi une période de u, donc u est constante, ce qui est faux.
En conclusion, $\mathcal{P}$ est bien de dimension infinie.

Partie II :

6°) Notons, pour toute période p de c et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c,p,n) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k}$.

$\diamond$ Soit $n \in \mathbb{N}$. $pM(c,p,n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-2} c_{(n+1)+k} + c_{(n+1)+(p-1)} = \sum_{h=1}^{p-1} c_{n+h} + c_n$ (en posant $h = k+1$ et car c est p-périodique), donc $pM(c,p,n+1) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} c_{n+k} = pM(c,p,n)$.
Ainsi la suite $(M(c,p,n))_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c,p,n) = M(c,p,0)$.
$\diamond$ Notons p_0 la période minimale de c et soit p une période de c.
D'après la question 4, il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = kp_0$. Alors, par sommation par paquets, $M(c,p,0) = \dfrac{1}{kp_0}\displaystyle\sum_{h=0}^{kp_0-1} c_h = \dfrac{1}{kp_0}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{h=\alpha p_0}^{(\alpha+1)p_0-1} c_h = \dfrac{1}{kp_0}\sum_{\alpha=0}^{k-1}\sum_{h=0}^{p_0-1} c_{h+\alpha p_0}$. Ainsi, $M(c,p,0) = \dfrac{1}{k}\displaystyle\sum_{\alpha=0}^{k-1} M(c,p_0,\alpha p_0) = \dfrac{1}{k}kM(c,p_0,0)$, d'après le point précédent.
On en déduit que $M(c,p,0) = M(c,p_0,0)$.
$\diamond$ En conclusion, pour toute période p de c et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M(c,p,n) = M(c,p_0,0)$: $M(c,p,n)$ ne dépend ni de p, ni de n, on peut effectivement le noter $M(c)$.
$\diamond$ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$, $d = (d_n) \in \mathcal{P}$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Notons p une période de c et q une période de d. On sait alors que pq est une période de $\alpha c + d$. Ainsi,
$M(\alpha c + d) = M(\alpha c + d, pq, 0) = \dfrac{1}{pq}\displaystyle\sum_{k=0}^{pq-1}(\alpha c_k + d_k) = \alpha M(c,pq,0) + M(d,pq,0)$, car pq est une période de c et de d. Ainsi, $M(\alpha c + d) = \alpha M(c) + M(d)$. De plus M est à valeurs dans le corps $\mathbb{C}$ et $\mathcal{P}$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, donc M est bien une forme linéaire sur $\mathcal{P}$.

7°)
a) Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ et p une période de c.
$|M(c)| = \dfrac{1}{p}\Big|\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} c_k\Big| \leqslant \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}|c_k| \leqslant \dfrac{1}{p}\sum_{k=0}^{p-1}\|c\| = \|c\|$. Or M est linéaire, donc d'après le cours, M est continue (elle est même lipschitzienne).

b) Ce qui précède montre que, pour tout $c \in \mathcal{P}\setminus\{0\}$, $\dfrac{|M(c)|}{\|c\|} \leqslant 1$, donc 1 est un majorant de $\left\{\dfrac{|M(c)|}{\|c\|} \ / \ c \in \mathcal{P}\setminus\{0\}\right\}$. Ainsi, par passage à la borne supérieure, $\displaystyle\sup_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \frac{|M(c)|}{\|c\|} \leqslant 1$.
Notons $\mathbf{1}$ la suite constante égale à 1. $\mathbf{1} \in \mathcal{P}$, de période 1,

donc $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{|M(c)|}{\|c\|} \geqslant \dfrac{|M(\mathbf{1})|}{\|\mathbf{1}\|} = 1$. En conclusion, $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{|M(c)|}{\|c\|} = 1$.

c) $\mathcal{P}_0 = \mathrm{Ker}(M) = M^{-1}(\{0\})$, or M est continue et $\{0\}$, en tant que singleton, est un fermé de $\mathbb{C}$, donc d'après le cours, $\mathcal{P}_0$ est un fermé de $\mathcal{P}$.

8°)
a)
$\diamond$ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. Soit p une période de c. Posons $D(c) = d = (d_n)$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+p} = c_{n+1+p} - c_{n+p} = d_n$, donc $d \in \mathcal{P}$.
De plus, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $c, d \in \mathcal{P}$, on vérifie aisément que $D(\alpha c+d) = \alpha D(c)+D(d)$, donc D est bien un endomorphisme sur $\mathcal{P}$.
$\diamond$ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. $c \in \mathrm{Ker}(D) \iff \forall n \in \mathbb{N},\ c_{n+1} - c_n = 0$, donc $\mathrm{Ker}(D)$ est l'ensemble des suites constantes de complexes.
$\diamond$ Soit $d = (d_n) \in \mathrm{Im}(D)$:
il existe $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$.
Soit p une période de c. On a vu que p est aussi une période de d,
donc $M(d) = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p-1}(c_{k+1} - c_k) = M(c,p,1) - M(c,p,0) = 0$ d'après la question 6.
Ceci prouve que $\mathrm{Im}(D) \subset \mathcal{P}_0$.
Réciproquement, soit $d = (d_n) \in \mathcal{P}_0$. On définit la suite de complexes $c = (c_n)$ par les relations : $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = d_n + c_n$.
Soit p une période de d. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on montre par récurrence sur k que $c_{n+k} = c_n + \displaystyle\sum_{h=0}^{k-1} d_{n+h}$, donc en particulier, $c_{n+p} = c_n + pM(d) = c_n$ car $d \in \mathcal{P}_0 = \mathrm{Ker}(M)$.
Ainsi $c \in \mathcal{P}$. De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_n = c_{n+1} - c_n$, donc $d = D(c) \in \mathrm{Im}(D)$.
On a donc prouvé que $\mathrm{Im}(D) = \mathcal{P}_0$.
b)
$\diamond$ Soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|c_{n+1} - c_n| \leqslant |c_{n+1}| + |c_n| \leqslant 2\|c\|$, donc par passage à la borne supérieure, $\|D(c)\| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} |c_{n+1} - c_n| \leqslant 2\|c\|$. Or D est linéaire, donc D est continue.
$\diamond$ Ainsi, pour tout $c \in \mathcal{P} \setminus \{0\}$, $\dfrac{\|D(c)\|}{\|c\|} \leqslant 2$,
donc par passage au sup, $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{\|D(c)\|}{\|c\|} \leqslant 2$.
Posons $c_0 = ((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$. c_0 est 2-périodique, $\|c_0\| = 1$
et $D(c_0) = ((-1)^{n+1} - (-1)^n)_{n\in\mathbb{N}} = -2c_0$, donc $\|D(c_0)\| = 2$.
Alors $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{\|D(c)\|}{\|c\|} \geqslant \dfrac{\|D(c_0)\|}{\|c_0\|} = 2$. En conclusion, $\sup\limits_{c\in\mathcal{P}\setminus\{0\}} \dfrac{\|D(c)\|}{\|c\|} = 2$.

9°)
a) Soit $c \in \mathcal{P}_0$. Notons p une période de c. Posons $d = (d_n) = I(c)$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $d_{n+p} = d_n + \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k = d_n + pM(c,p,n+1) = d_n$, car $c \in \mathcal{P}_0 = \mathrm{Ker}(M)$.
Ainsi $I(c) \in \mathcal{P}$.
De plus, on vérifie aisément que, pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et $c, d \in \mathcal{P}_0$, $I(\alpha c + d) = \alpha I(c) + I(d)$, donc I est bien une application linéaire de $\mathcal{P}_0$ dans $\mathcal{P}$.

b) Supposons que I est continue. I étant linéaire, d'après le cours, il existe $k \in \mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $c \in \mathcal{P}_0$, $\|I(c)\| \leqslant k\|c\|$.
Fixons $p \in \mathbb{N}^*$ et posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = e^{\frac{i\pi n}{p}}$.
c est $2p$-périodique, donc $c \in \mathcal{P}$. De plus, $M(c) = \frac{1}{2p} \sum_{k=0}^{2p-1} \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^k = \frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^{2p}}{1 - e^{\frac{i\pi}{p}}}$, car $e^{\frac{i\pi}{p}} \neq 1$. Ainsi, $M(c) = 0$ et $c \in \mathcal{P}_0$.
$\|I(c)\| \geqslant \left| \sum_{k=0}^{p-1} \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^k \right| = \left| \frac{1 - \left(e^{\frac{i\pi}{p}}\right)^p}{1 - e^{\frac{i\pi}{p}}} \right| = \frac{2}{|e^{\frac{i\pi}{2p}}(-2i\sin(\frac{\pi}{2p}))|}$, donc $\|I(c)\| \geqslant \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2p})}$.
On en déduit que $k = k\|c\| \geqslant \|I(c)\| \geqslant \frac{1}{\sin(\frac{\pi}{2p})} \underset{p\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\frac{\pi}{2p}} = \frac{2p}{\pi} \underset{p\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. C'est impossible, donc I n'est pas continue.

c) $\diamond$ Soit $c \in \mathrm{Ker}(I)$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\sum_{k=0}^{n} u_k = 0$. Par récurrence sur n, on en déduit facilement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 0$, donc $\mathrm{Ker}(I) = \{0\}$.
$\diamond$ Supposons que $c \in \mathrm{Im}(I)$: il existe $d \in \mathcal{P}_0$ tel que $c = I(d)$.
Notons p une période de d : c'est aussi une période de c d'après la question a) et $c_{p-1} = \sum_{k=0}^{p-1} d_k = pM(d,p,0) = 0$ car $d \in \mathcal{P}_0$.
$\diamond$ Réciproquement, soit $c = (c_n) \in \mathcal{P}$ tel que $c_{p-1} = 0$, où p désigne une période de c.
Montrons que $c \in \mathrm{Im}(I)$.
Posons $d_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_n = c_{n-1}$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $d_{n+p} = c_{n-1+p} = c_{n-1} = d_n$ et $d_p = c_{p-1} = 0 = d_0$, donc $d \in \mathcal{P}$ et p est une période de d.
Alors $e = D(d) \in \mathrm{Im}(D) = \mathcal{P}_0$ et $I(e) = \left(\sum_{k=0}^{n}(d_{k+1} - d_k)\right)_{n\in\mathbb{N}} = (d_{n+1} - d_0) = c$.
Ainsi, $c \in \mathrm{Im}(I)$.
$\diamond$ On a donc montré que $c \in \mathrm{Im}(I)$ si et seulement si il existe une période p de c telle que $c_{p-1} = 0$. Soit c une telle suite. Notons p_c la plus petite période de c. On a vu qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $p = kp_c$. Alors $0 = c_{kp_c-1} = c_{p_c-1}$.
Ainsi, en notant p_c la plus petite période de c, pour tout $c \in \mathcal{P}$, on a montré que $\mathrm{Im}(I) = \{c = (c_n) \in \mathcal{P} \ / \ c_{p_c-1} = 0\}$.

Partie III :

10°) Si $c = 0$, la série est identiquement nulle, donc elle converge.
Supposons maintenant que $c \neq 0$. Notons p une période de c. Il existe $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $c_r \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{c_{kp+r}}{(kp+r)^\alpha} = \frac{c_r}{(kp+r)^\alpha} \underset{k \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$, car $\alpha \leqslant 0$.
A fortiori, $\frac{c_n}{n^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\not\longrightarrow} 0$ (sinon toutes ses suites extraites convergeraient vers 0), donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ diverge grossièrement.

11°) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\left| \frac{c_n}{n^\alpha} \right| \leqslant \frac{\|c\|}{n^\alpha}$, or $\alpha > 1$, donc la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge. Ainsi, $\sum_{n \geqslant 1} \frac{c_n}{n^\alpha}$ est absolument convergente.

12°) Si $c = 0$, la série est identiquement nulle, donc elle converge.
Supposons maintenant que $c \neq 0$. Notons p une période de c. Il existe $r \in \{0, \dots, p-1\}$ tel que $c_r \neq 0$. Alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\frac{|c_{kp+r}|}{(kp+r)^\alpha} = \frac{|c_r|}{(kp+r)^\alpha}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$\sum_{n=p}^{kp-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} = \sum_{h=1}^{k-1} \sum_{n=ph}^{ph+p-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} \geqslant \sum_{h=1}^{k-1} \frac{|c_{ph+r}|}{(ph+r)^\alpha} = |c_r| \sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{(ph+r)^\alpha}$,
mais $\frac{1}{(ph+r)^\alpha} \underset{h \to +\infty}{\sim} \frac{1}{p^\alpha} \times \frac{1}{h^\alpha}$ et $\alpha \leqslant 1$, donc la série $\sum_h \frac{1}{(ph+r)^\alpha}$ diverge, or elle est à termes positifs, donc $\sum_{h=1}^{k-1} \frac{1}{(ph+r)^\alpha} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Alors, d'après le principe des gendarmes, $\sum_{n=p}^{kp-1} \frac{|c_n|}{n^\alpha} \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$. Ceci prouve que la série tronquée $\sum_{n \geqslant p} \frac{|c_n|}{n^\alpha}$ est divergente.
Il en est de même d'après le cours pour la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{|c_n|}{n^\alpha}$.

13°)
a) Il s'agit d'une transformation d'Abel :
$\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k - S_{k-1}}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \frac{S_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{S_k}{(k+1)^\alpha}$,
donc $\sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{k^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} S_k \Big(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha} \Big) + \frac{S_n}{(n+1)^\alpha} - c_0$.
b) Avec les notations de la partie II, $(S_n) = I(c) \in \mathcal{P}$, donc la suite (S_n) est bornée.
On en déduit déjà que $\frac{S_n}{(n+1)^\alpha} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, car $\alpha > 0$.

De plus, $\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} = \dfrac{1}{k^\alpha}\Big(1 - \dfrac{1}{(1+\frac{1}{k})^\alpha}\Big) = \dfrac{1}{k^\alpha}(1-(1-\dfrac{\alpha}{k}+O(\dfrac{1}{k^2})))$, donc $\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha} = \dfrac{\alpha}{k^{\alpha+1}} + O\Big(\dfrac{1}{k^{\alpha+2}}\Big)$.

On a vu que $S_n = O(1)$, donc $S_k\Big(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\Big) = O\Big(\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}\Big)$ mais $\alpha+1>1$, donc $\sum_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{k^{\alpha+1}}$ converge (et ses termes sont positifs), donc d'après le cours, $\sum_{k\geqslant 1} S_k\Big(\dfrac{1}{k^\alpha} - \dfrac{1}{(k+1)^\alpha}\Big)$ est absolument convergente. Alors, d'après la formule établie au a), la suite de terme général $\sum_{k=1}^{n}\dfrac{c_k}{k^\alpha}$ converge lorsque n tend vers $+\infty$, ce qui prouve la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{c_n}{n^\alpha}$.

14°) Posons $d_n = c_n - M(c)$, pour tout $n\in\mathbb{N}$. La suite constante est dans $\mathcal{P}$ qui est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel , donc $d = (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{P}$. De plus, par linéarité de M, $M(d) = M(c) - M(c)\times M((1)_{n\in\mathbb{N}}) = M(c) - M(c) = 0$, donc $d\in\mathcal{P}_0$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\dfrac{c_n}{n^\alpha} = \dfrac{d_n}{n^\alpha} + M(c)\dfrac{1}{n^\alpha}$, or d'après la question précédente, $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{d_n}{n^\alpha}$ est convergente, et par hypothèse, $M(c)\neq 0$, donc $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{c_n}{n^\alpha}$ a même nature que $\sum_{n\geqslant 1}\dfrac{1}{n^\alpha}$: elle est divergente.

Partie IV :

15°) Soit $\alpha\in\mathbb{C}$ et $c,d\in\mathcal{P}_0$. D'après le cours sur les séries convergentes, $S(\alpha c + d) = \sum_{n=1}^{+\infty}\dfrac{\alpha c_n + d_n}{n} = \alpha S(c) + S(d)$. De plus S est à valeurs dans $\mathbb{C}$, donc S est une forme linéaire sur $\mathcal{P}_0$.

16°) On a vu en question 4 que c est 4-périodique avec $(c_0,c_1,c_2,c_3) = (0,-1,0,1)$, donc pour tout $n\in\mathbb{N}$, $c_{2n} = 0$ et $c_{2n+1} = (-1)^{n+1}$. Ainsi,

$S(c) = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{2N+1}\dfrac{c_n}{n} = \lim\limits_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N}\dfrac{c_{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\displaystyle\int_0^1 t^{2k}\,dt = -\int_0^1\sum_{k=0}^{n}(-t^2)^k\,dt$,

donc $\sum_{k=0}^{n}\dfrac{(-1)^{k+1}}{2k+1} = -\displaystyle\int_0^1\frac{1-(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt = [-\mathrm{arctan}t]_0^1 + \int_0^1\frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt.$

Or par inégalité triangulaire, $\left|\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt\right| \leqslant \int_0^1 t^{2n+2}\,dt = \frac{1}{2n+3} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc d'après le principe des gendarmes, $\int_0^1 \frac{(-t^2)^{n+1}}{1+t^2}\,dt \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. En conclusion, $S(C) = -\frac{\pi}{4}$.

17°) **a)** Posons $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n$. Alors $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{n} + \ln(1 - \frac{1}{n}) = O(\frac{1}{n^2})$. Ainsi, $\sum(u_n - u_{n-1})$ est une série télescopique convergente, donc d'après le cours, il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \gamma$, ce qu'il fallait démontrer.

b) On vérifie que c est une suite p-périodique et que $M(c) = 0$, donc $c \in \mathcal{P}_0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=hp+1}^{hp+p} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \sum_{k=1}^{p} \frac{c_k}{k+hp}$, donc

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \sum_{h=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k+hp} + \frac{1-p}{p+hp} \Big) = \sum_{h=0}^{n-1} \Big(\sum_{k=1}^{p} \frac{1}{k+hp} - \frac{p}{p+hp} \Big) = \sum_{k=1}^{np} \frac{1}{k} - \sum_{h=0}^{n-1} \frac{1}{h+1}.$$

Alors d'après la question a),

$$\sum_{k=1}^{np} \frac{c_k}{k} = \ln(np) + \gamma + o(1) - \ln n - \gamma + o(1) = \ln p + o(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln p.$$

En conclusion, $S(c) = \ln p$.

18°)

◇ Pour tout $t \in]0,1]$, $\frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)} = \frac{\sum_{k=0}^{q-1} t^k}{1+t^q}$, donc cette fonction de t se prolonge continûment sur $[0,1]$ et I_q est bien définie en tant qu'intégrale sur un segment d'une fonction continue.

◇ De plus $J_q = \int_0^1 \frac{\sum_{k=0}^{q-1} t^k}{1+t^q}\,dt \geqslant \sum_{k=0}^{q-1} \int_0^1 \frac{t^k}{2}\,dt = \sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{2(k+1)} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{k} \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
D'après le principe des gendarmes, $J_q \underset{q\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

19°) La suite d est bien $2q$-périodique avec $M(d) = 0$, donc $d \in \mathcal{P}_0$. On sait ainsi que $\sum_{n=1}^{2qN} \frac{d_n}{n}$ converge vers $S(d)$ lorsque N tend vers $+\infty$. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{2qN}\frac{d_n}{n} &= \sum_{h=0}^{N-1}\sum_{n=2qh+1}^{2q(h+1)}\frac{d_n}{n} = \sum_{h=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{2q}\frac{d_n}{n+2qh}\\
&= \sum_{h=0}^{N-1}\Big(\sum_{n=1}^{q}\frac{1}{n+2qh} - \sum_{n=q+1}^{2q}\frac{1}{n+2qh}\Big) = \sum_{h=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{q}\Big(\frac{1}{n+2qh} - \frac{1}{n+q+2qh}\Big)\\
&= \sum_{h=0}^{N-1}\sum_{n=1}^{q}\Big(\frac{(-1)^{2h}}{n+2qh} + \frac{(-1)^{2h+1}}{n+q(2h+1)}\Big) = \sum_{n=1}^{q}\sum_{i=0}^{2N-1}\frac{(-1)^i}{n+qi}\\
&= \sum_{n=1}^{q}\sum_{i=0}^{2N-1}(-1)^i\int_0^1 t^{n+qi-1}\,dt = \int_0^1\sum_{n=1}^{q}t^{n-1}\sum_{i=0}^{2N-1}(-t^q)^i\,dt\\
&= \int_0^1\sum_{n=0}^{q-1}t^n\frac{1-(-t^q)^{2N}}{1+t^q}\,dt = \int_0^1\frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)}(1-t^{2Nq})\,dt, \text{ or}
\end{aligned}$$

$$\Big|\int_0^1\frac{1-t^q}{(1-t)(1+t^q)}t^{2Nq}\,dt\Big| \leqslant \int_0^1\frac{\sum_{k=0}^{q-1}t^k}{1+t^q}t^{2Nq}\,dt \leqslant q\int_0^1 t^{2Nq}\,dt = \frac{q}{2Nq+1}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}0,$$

donc $\displaystyle\sum_{n=1}^{2qN}\frac{d_n}{n}\underset{N\to+\infty}{\longrightarrow}J_q$.

En conclusion, $S(d)=J_q$.

20°) Supposons que S est continue. S étant linéaire, il existe $k\in\mathbb{R}_+$ tel que, pour tout $c\in\mathcal{P}_0$, $|S(c)|\leqslant k\|c\|$.

En particulier, pour tout $q\in\mathbb{N}^*$, en utilisant la suite d précédente, on obtient que $k=k\|d\|\geqslant|S(d)|=J_q\underset{q\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. C'est impossible, donc S n'est pas continue.